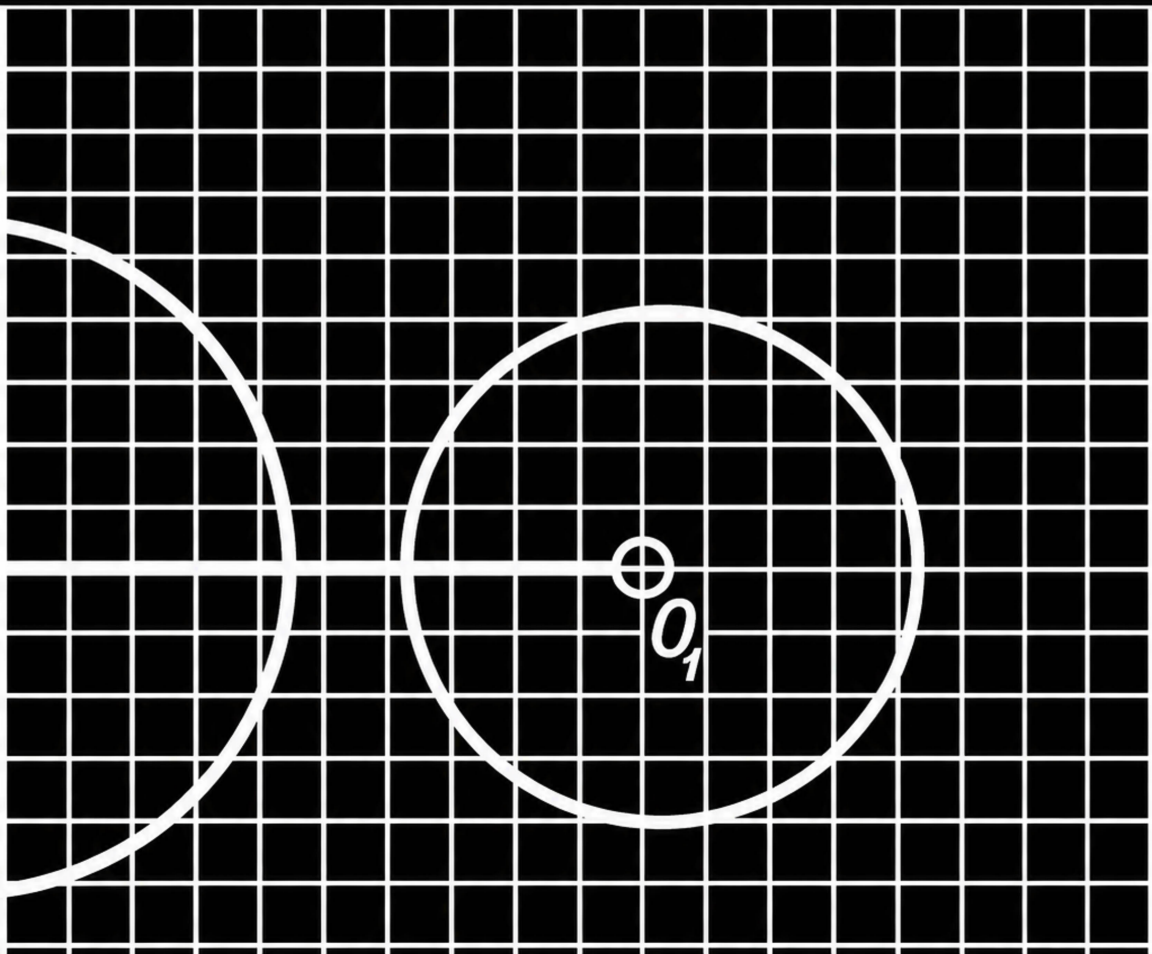
Справочник по элементарной математике, механике и физике



СПРАВОЧНИК

ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ, МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

Издание двенадцатое

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА И ТЕХНИКА“
МИНСК 1973

В составлении «Справочника» принимали участие Б. Я. Березовский (раздел «Математика»), И. Н. Веселовский (раздел «Механика»), В. Л. Левкович («Комплексные числа» в разделе «Математика»), Н. И. Кузнецов (разделы «Некоторые справочные сведения» и «Физика»).

Научный редактор
Н. И. КУЗНЕЦОВ

Печатается по тексту: «Справочник по элементарной математике, механике и физике», издание десятое. Изд-во «Наука и техника», Минск, 1968, с изменениями и дополнениями.

С $\frac{0222\text{-}048}{\text{М316-73}}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

I. Латинский и греческий алфавиты 3

II. Международная система единиц (система СИ) 4
1. Значение системы единиц при решении задач 4
2. Список единиц системы СИ 5

III. Несистемные единицы (по отношению к системе СИ) 13
1. Десятичные кратные и десятичные дольные единицы 13
2. Приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц 13
3. Прочие несистемные единицы 13
4. Система единиц СГС (или CGS) 16
5. Алфавитный список единиц 16

IV. Важнейшие физические постоянные 21

МАТЕМАТИКА

I. Квадраты, кубы, кв. и куб. корни, πn, $\frac{\pi}{4} n^2$, $\frac{1}{n}$ 22

II. Математические обозначения 25

III. Алгебра 26
1. Сложение и вычитание относительных чисел 26
2. Умножение и деление относительных чисел 26
3. Умножение многочленов 27
4. Формулы сокращенного умножения и разложения на множители 27
5. Основное свойство дробей 28
6. Сложение и вычитание дробей 28
7. Умножение дробей 28
8. Деление дробей 28

9. Пропорция 29
10. Арифметическое и геометрическое средние 29
11. Уравнение 1-й степени с одним неизвестным 29
12. Система уравнений 1-й степени 30
13. Возведение в степень 32
14. Извлечение корня 33
15. Знак перед корнем 33
16. Действия со степенями и корнями 34
17. Первая, нулевая, отрицательная и дробная степени 35
18. Извлечение квадратного корня из чисел 35
19. Извлечение квадратного корня с заданной точностью 36
20. Квадратные уравнения 37
21. Формулы решения квадратных уравнений 37
22. Неполные квадратные уравнения 37
23. Действительные и мнимые решения квадратных уравнений 38
24. Свойства корней квадратного уравнения (теорема Виета) 39
25. Разложение трехчлена 2-й степени на множители 40
26. Комплексные числа 40
27. Сложение комплексных чисел 42
28. Вычитание комплексных чисел 42
29. Умножение комплексных чисел 43
30. Деление комплексных чисел 43
31. Геометрическое представление комплексного числа 44
32. Тригонометрическая форма комплексного числа 44
33. Действия над комплексными числами, выраженными в тригонометрической форме 46
34. Арифметическая прогрессия 48
35. Формулы арифметической прогрессии 49
36. Геометрическая прогрессия 49
37. Формулы геометрической прогрессии 49
38. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия 50
39. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии 50
40. Понятие логарифма 51
41. Правила логарифмирования 51
42. Десятичные логарифмы 52
43. Таблицы десятичных логарифмов 53
44. Логарифмы с отрицательной характеристикой 56
45. Пример вычисления при помощи логарифмов 56

46. Размещения 57
47. Число размещений 57
48. Перестановки 57
49. Число перестановок 58
50. Сочетания 58
51. Число сочетаний 58
52. Бином Ньютона 59
53. Свойства бинома Ньютона 59
54. Таблица биномиальных коэффициентов 60

IV. Геометрия 61

А. Планиметрия (геометрия на плоскости) 61

55. Треугольники 61
56. Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат 62
57. Трапеция 63
58. Высота, медиана, биссектриса треугольника 63
59. Четыре замечательные точки в треугольнике 64
60. Основные формулы для треугольника 65
61. Площади многоугольников 66
62. Правильные многоугольники 67
63. Окружность и линии в окружности 68
64. Круг и части круга 68
65. Расположение двух кругов 69
66. Градусное измерение углов и дуг 70
67. Число π 70
68. Основные формулы для круга (длины и площади) 70

Б. Стереометрия (геометрия в пространстве) 72

69. Многогранники 72
70. Поверхности и объемы многогранников 75
71. Поверхности и объемы круглых тел (цилиндра, конуса, шара и его частей) 76

V. Тригонометрия 77

72. Тригонометрические функции угла 77
73. Тригонометрические функции важнейших углов 78
74. Таблицы тригонометрических функций 79
75. Формулы прямоугольных треугольников 81
76. Решение прямоугольных треугольников 81
77. Тригонометрические функции углов, превышающих 90° 81

78. Основные формулы тригонометрии 83
79. Формулы косоугольных треугольников 85
80. Решение косоугольных треугольников 87

МЕХАНИКА

1. Предмет механики и ее части 88

I. Кинематика 88
2. Поступательное движение 88
3. Траектория 89
4. Закон движения 89
5. Равномерное движение 89
6. Вращательное движение 90
7. Линейная скорость при вращении 90
8. Законы ременных передач и зубчатых колес 91
9. Винтовое движение 92
10. Равноускоренное движение 92
11 Законы падения тел 93
12. Нормальное, или центростремительное, ускорение 93
13. Гармоническое колебание 94

II. Статика 95
14. Сила и ее изображение 95
15. Равнодействующая сила 96
16. Правила сложения сил и законы их равновесия 96
17. Момент силы 98
18. Теоремы о моментах сил 99
19. Центр тяжести 99
20. Центры тяжести простых геометрических фигур и тел 100

III. Динамика 102
21. Основные законы динамики (законы Ньютона) 102
22. Основное уравнение динамики 102
23. Единицы силы 102
24. Вес 102
25. Центростремительная сила 103
26. Работа 103
27. Единица работы 103
28 Выражение работы, если направление силы не совпадает с направлением пути 104

29. Кинетическая энергия 104
30 Мощность 104
31. Единица мощности 105
32. Коэффициент полезного действия 105
33. Момент инерции 105
34. Моменты инерции простейших тел 106
35. Кинетическая энергия при вращении 107
36 Законы трения 107
37. Коэффициенты трения некоторых тел 108

IV. Закон всемирного тяготения 109
38. Гравитационная постоянная 109
39. Притяжение тел Землей 109

ФИЗИКА

I. Предварительные основные понятия 111
1. Масса и вес 111
2. Плотность 111
3. Плотность употребительных веществ 112

II. Жидкости и газы 113
4. Давление 113
5. Единицы давления 114
6. Закон Паскаля 114
7. Давление жидкости на дно сосуда 115
8 Давление жидкости на боковую стенку 115
9. Законы сообщающихся сосудов 116
10 Закон Архимеда 116
11. Плавание тел 117
12 Закон Паскаля для газов 117
13. Давление атмосферы 117
14. Барометр 118
15. Закон Бойля—Мариотта 118

III. Теплота 119
16. Измерение температуры 119
17. Линейное расширение при нагревании 121
18 Объемное расширение при нагревании 121
19. Таблицы коэффициентов расширения 122
20 Закон Гей-Люссака 123

21. Зависимость давления от температуры 123
22. Закон Бойля—Мариотта—Гей-Люссака 123
23. Уравнение Клапейрона 124
24. Универсальная газовая постоянная 124
25. Уравнение Менделеева—Клапейрона 124
26. Единицы теплоты 125
27 Теплоемкость 126
28. Удельная теплоемкость 126
29. Таблица удельных теплоемкостей веществ 127
30. Теплота, необходимая для нагревания тела 127
31. Температура плавления и отвердевания 127
32. Удельная теплота плавления 128
33. Таблица удельной теплоты плавления 129
34. Теплота, необходимая для плавления тела 129
35. Затвердевание вещества 129
36. Особенность воды при охлаждении 129
37. Испарение и насыщенные пары 130
38. Давление паров 130
39. Таблица давления насыщенных паров 130
40. Таблица давления и плотности водяного пара 131
41. Зависимость температуры кипения от давления 131
42. Конденсация пара 132
43 Зависимость температуры кипения воды от давления 132
44 Удельная теплота парообразования 132
45. Теплота, необходимая для парообразования 133
46. Удельная теплота сгорания топлива 133
47. Таблица удельной теплоты сгорания различного топлива 134
48. Теплота, выделившаяся при сгорании топлива 134
49. Теплопроводность 134
50. Коэффициент теплопроводности 134
51. Таблица коэффициентов теплопроводности 135

IV. Электричество 136
52. Электрический заряд и электрический ток 136
53 Единицы силы электрического тока и количества электричества 137
54. Заряд электрона 137
55. Закон Кулона Электрическая постоянная 137
56. Электрическое поле 138
57. Электрическое напряжение 139

58. Единицы напряжения 139
59. Напряженность электрического поля 140
60. Электрические силовые линии 141
61. Связь между напряжением и напряженностью 141
62 Единицы напряженности электрического поля 142
63. Конденсатор 142
64. Электрическая емкость 143
65. Единицы электрической емкости 143
66. Емкость плоского конденсатора 144
67. Относительная диэлектрическая проницаемость 144
68. Таблица относительных диэлектрических проницаемостей некоторых диэлектриков при 20 °С 145
69 Электрическая цепь. Источники электрической энергии 145
70. Электродвижущая сила 146
71. Закон Ома для участка цепи 146
72. Единицы сопротивления 147
73. Закон Ома для полной цепи 147
74. Сопротивление однородных проводников 147
75. Единицы удельного сопротивления 148
76. Зависимость сопротивления от температуры 148
77. Таблица удельных сопротивлений веществ и их термических коэффициентов 149
78. Проводимость 150
79. Удельная проводимость 150
80. Реостаты 150
81. Последовательные и параллельные соединения 150
82. Сопротивление при различных соединениях 151
83 Сила тока при параллельном соединении 151
84. Электролиты. Ток в электролитах 152
85. Законы Фарадея для электролиза 152
86. Ток в газах 153
87. Ток в вакууме 154
88. Полупроводники. Ток в полупроводниках 155
89. Мощность электрического тока 157
90. Работа электрического тока 157
91. Единицы работы и мощности электрического тока 158
92. Тепловое действие тока. Закон Джоуля—Ленца 158
93. Магнитные силы 159
94. Взаимодействие параллельных проводников с током. Магнитная постоянная 161

95. Магнитное поле 162
96 Магнитные силовые линии 162
97. Электромагнит 163
98 Действие магнитного поля на ток 164
99. Магнитный поток 165
100. Электромагнитная индукция 166
101. Направление и величина индуцированной э.д.с. 166
102. Напряжение, возникающее в проводнике, движущемся в магнитном поле 167
103. Количество электричества, индуцируемое в замкнутом контуре при изменении магнитного потока 168
104. Измерение магнитного потока и магнитной индукции 168
105. Магнитный поток сцепления 169
106. Единицы магнитного потока и магнитной индукции 170
107. Самоиндукция 171
108. Направление и величина э.д.с. самоиндукции 171
109 Индуктивность. Единица индуктивности 172
110. Электрические машины постоянного тока: электродвигатель, генератор электрической энергии 173
111. Переменный ток 174
112. Эффективное значение э.д.с. и силы тока 174
113. Полное сопротивление и фазовый сдвиг в цепи переменного тока 175
114. Мощность переменного тока 176
115. Трансформирование тока 177
116. Электромагнитные колебания. Колебательный контур 177
117. Электромагнитные волны 178

V. Свет 179
118. Скорость света 179
119. Сила света 179
120. Световой поток 179
121. Освещенность 180
122. Законы освещенности 180
123. Законы отражения света 181
124. Сферические зеркала 181
125. Формула вогнутого зеркала 182
126. Фокус вогнутого зеркала 182
127. Показатель преломления 182
128. Отклонение лучей при преломлении 183
129. Линзы 184

130. Фокус двояковыпуклой линзы 184
131. Формула двояковыпуклой линзы 185
132. Преломление различных лучей. Спектр 185
133. Различные спектры 186
134. Невидимые лучи 186
135. Длины электромагнитных и световых волн 186
136. Источники света 187

VI. Звук 190
137 Колебательное движение 190
138 Период, частота, амплитуда 191
139 Волны на воде 191
140 Волны в воздухе 192
141 Скорость распространения волн 192
142. Зависимость длины волны от периода (частоты) колебания 193
143. Отражение волн 193
144. Дифракция волн 193
145. Интерференция волн 193
146. Резонанс 194
147. Высота тона 194
148 Сила и громкость звука 194
149. Бинауральный эффект 195

Алфавитный указатель 196

НЕКОТОРЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

I. ЛАТИНСКИЙ И ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТЫ

Латинский алфавит				Греческий алфавит			
буквы	названия букв	буквы	названия букв	буквы	названия букв	буквы	названия букв
Aa	а	Nn	эн	Αα	альфа	Νν	ни(ню*)
Bb	бе	Oo	о	Ββ	бета	Ξξ	кси
Cc	це	Pp	пе	Γγ	гамма	Οο	омикрон
Dd	де	Qq	ку	Δδ	дельта	Ππ	пи
Ee	е	Rr	эр	Εε	эпсилон	Ρρ	ро
Ff	эф	Ss	эс	Ζζ	дзета	Σσ(ς*)	сигма
Gg	ге(же*)	Tt	тэ	Ηη	эта	Ττ	тау
Hh	ха(аш*)	Uu	у	Θϑ(θ)	тета	Υυ	ипсилон
Ii	и	Vv	ве	Ιι	йота	Φφ	фи
Jj	йот(жи*)	Ww	дубль-ве	Κκ	каппа	Χχ	хи
Kk	ка	Xx	икс	Λλ	ламбда	Ψψ	пси
Ll	эль	Yy	игрек	Μμ	ми (мю*)	Ωω	омега
Mm	эм	Zz	зет				

* В скобках дано другое название или начертание букв.

II. МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ (СИСТЕМА СИ)

1. Значение системы единиц при решении задач

При решении задач и подстановке числовых значений в физические уравнения все числовые значения физических величин должны быть приведены к одной и той же системе единиц *.

С 1 января 1963 г. введен государственный стандарт на единицы измерений физических величин. Для всех областей науки, техники, народного хозяйства и педагогической практики устанавливается единая унифицированная система единиц: *«Международная система единиц»*, или сокращенно *«система СИ»* (SI — System International).

Для построения системы СИ используется шесть *основных* единиц (три механические, одна электрическая, одна тепловая, одна световая):

единица длины — метр, м;
единица массы — килограмм, кг;
единица времени — секунда, с;
единица силы электрического тока — ампер, А;
единица температуры — кельвин, К;
единица силы света — кандела, кд

и две *дополнительные* (геометрические):

единица плоского угла — радиан, рад;
единица телесного угла — стерадиан, ср.

Эталоны основных единиц устанавливаются на основании природных явлений так, чтобы при утрате подлинника той или иной меры легко можно было воспроизвести его истинные размеры.

Остальные единицы устанавливаются на основании взаимосвязи между физическими величинами и носят название *производных* единиц (см. стр. 7—12).

---

* Этого правила можно не придерживаться, когда производятся примитивные расчеты. Например, в законе Бойля—Мариотта $p_1V_1=p_2V_2$ необязательно объем газа V и его давление p выражать в системных единицах, лишь бы единицы измерения соответствующих величин были одинаковы.

2. Список единиц системы СИ

Физическая величина	Единица измерения	Обозначение единиц	Размер единиц	Определение единиц
		Основные единицы		
Длина	метр	м		Метр—длина, равная 1650763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ (оранжевая линия) атома криптона-86.
Масса	килограмм	кг		Килограмм — единица массы, равная массе международного прототипа килограмма.
Время	секунда	с		Секунда — 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.
Сила электрического тока	ампер	А		Ампер—сила неизменяющегося электрического тока, который, проходя по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, рас-

Продолжение

Физическая величина	Единица измерения	Обозначение единиц	Размер единиц	Определение единиц
				положенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывал бы между этими проводниками силу, равную 2×10^{-7} Н на каждый метр длины.
Температура	кельвин	К		Кельвин—единица термодинамической температуры—1/273,16 часть термодинамической температуры тройной точки воды.
Сила света	кандела	кд		Кандела—сила света, испускаемая с площади 1/600 000 м² сечения полного излучателя в перпендикулярном этому сечению направлении, при температуре затвердевания платины и давлении 101 325 Па.
Дополнительные единицы				
Плоский угол	радиан	рад		Радиан — угол между двумя радиусами окружности, дуга между которыми по длине равна радиусу.

Телесный угол	стерадиан	ср		Стерадиан — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной радиусу сферы.
Производные единицы пространства и времени				
Площадь	квадратный метр	$м^2$		Квадратный метр — площадь квадрата с длиной стороны, равной 1 м.
Объем	кубический метр	$м^3$		Кубический метр — объем куба с длиной ребра, равной 1 м.
Скорость	метр в секунду	м/с		Метр в секунду — скорость прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой она за время 1 с проходит путь 1 м.
Ускорение	метр на секунду в квадрате	$м/с^2$		Метр на секунду в квадрате — ускорение прямолинейно и равноускоренно движущейся точки, при котором за время 1 с скорость точки изменяется на 1 м/с.

Продолжение

Физическая величина	Единица измерения	Обозначение единиц	Размер единиц	Определение единиц
Частота	герц	Гц	$Гц = \frac{1}{с}$	Герц—частота, при которой за время 1 с происходит один цикл периодического процесса.
Угловая скорость	радиан в секунду	рад/с		Радиан в секунду — угловая скорость равномерно вращающегося тела, при которой за время 1 с совершается поворот тела относительно оси на угол 1 рад.
Производные единицы механических величин				
Плотность	килограмм на кубический метр	$кг/м^3$		Килограмм на кубический метр — плотность однородного тела, имеющего при объеме 1 $м^3$ массу 1 кг.
Сила	ньютон	Н	$Н = \frac{кг \cdot м}{с^2}$	Ньютон — сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 $м/с^2$ в направлении действия силы.
Давление	паскаль	Па	$Па = \frac{Н}{м^2}$	Паскаль—давление, вызываемое силой 1 Н, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 $м^2$.

Работа, энергия	джоуль	Дж	Дж=Н·м	Джоуль—работа силы 1 Н при перемещении ею тела на расстояние 1 м в направлении действия силы.
Мощность	ватт	Вт	$Вт=\frac{Дж}{с}$	Ватт—мощность, при которой работа 1 Дж совершается за время 1 с.
Момент силы	ньютон-метр	Н·м		Ньютон-метр — момент силы, равной 1 Н, относительно точки, расположенной на расстоянии 1 м от линии действия силы.
Производные единицы тепловых величин				
Количество теплоты	джоуль	Дж		Джоуль—количество теплоты, эквивалентное механической работе 1 Дж.
Удельная теплота	джоуль на килограмм	Дж/кг		Джоуль на килограмм—удельная теплота процесса, в котором веществу массой 1 кг сообщается (или отбирается от него) количество теплоты 1 Дж.
Теплоемкость	джоуль на кельвин	Дж/К		Джоуль на кельвин—теплоемкость тела, повышающего температуру на 1 К при подведении к нему количества теплоты 1 Дж.

2* Зак. 375

Продолжение

Физическая величина	Единица измерения	Обозначение единиц	Размер единиц	Определение единиц
Удельная теплоемкость	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)		Джоуль на килограмм-кельвин—удельная теплоемкость вещества, имеющего при массе 1 кг теплоемкость 1 Дж/К.
Производные единицы электрических и магнитных величин				
Количество электричества	кулон	Кл	Кл=А·с	Кулон—количество электричества, проходящего через поперечное сечение при токе силой 1 А за время 1 с.
Плотность электрического тока	ампер на квадратный метр	$м^2$		Ампер на квадратный метр—плотность равномерно распределенного по поперечному сечению площадью в 1 $м^2$ электрического тока силой 1 А.
Электрическое напряжение, потенциал, электродвижущая сила	вольт	В	$В=\frac{Вт}{А}$	Вольт—электрическое напряжение, вызывающее в электрической цепи постоянный ток силой 1 А при мощности 1 Вт.
Напряженность электрического поля	вольт на метр	В/м		Вольт на метр—напряженность однородного электрического поля, при которой между точками, находящимися на

				расстоянии 1 м вдоль линии напряженности поля, создается разность потенциалов 1 В.
Электрическая емкость	фарада	Ф	$Ф = \frac{Кл}{В}$	Фарада—емкость конденсатора, между обкладками которого при заряде 1 Кл возникает напряжение 1 В.
Электрическое сопротивление	ом	Ом	$Ом = \frac{В}{А}$	Ом—сопротивление проводника, между концами которого при силе тока 1 А возникает напряжение 1 В.
Удельное электрическое сопротивление	ом-метр	Ом·м		Ом-метр—удельное электрическое сопротивление, при котором цилиндрический прямолинейный проводник площадью поперечного сечения 1 м² и длиной 1 м имеет сопротивление 1 Ом
Электрическая проводимость	сименс	См	$См = \frac{1}{Ом}$	Сименс—электрическая проводимость проводника сопротивлением 1 Ом.
Удельная электрическая проводимость	сименс на метр	См/м		Сименс на метр — удельная электрическая проводимость, при которой цилиндрический прямолинейный проводник площадью поперечного сечения 1 м² и длиной 1 м имеет электрическую проводимость 1 См.

Продолжение

Физическая величина	Единица измерения	Обозначение единиц	Размер единиц	Определение единиц
Магнитный поток	вебер	Вб	Вб=Кл·Ом	Вебер—магнитный поток, при убывании которого до нуля в сцепленном с ним контуре сопротивлением 1 Ом проходит количество электричества 1 Кл.
Магнитная индукция	тесла	Т	$Т=\frac{Вб}{м^2}$	Тесла—магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение площадью 1 м² равен 1 Вб.
Индуктивность	генри	Г	$Г=\frac{Вб}{А}$	Генри—индуктивность контура, с которым при силе тока в нем 1 А сцепляется магнитный поток 1 Вб.
Производные единицы Световых величин				
Световой поток	люмен	лм	лм=кд·ср	Люмен—световой поток, испускаемый точечным источником в телесном угле 1 ср при силе света 1 кд.
Освещенность	люкс	лк	$лк=\frac{лм}{м^2}$	Люкс—освещенность поверхности площадью 1 м² при падающем на нее световом потоке 1 лм.
Яркость	кандела на квадратный метр	кд/м²		Кандела на квадратный метр—яркость светящейся поверхности площадью 1 м² при силе света 1 кд.

III. НЕСИСТЕМНЫЕ ЕДИНИЦЫ
(по отношению к системе СИ)

1. Десятичные кратные и десятичные дольные единицы

Диапазон измеряемых величин очень широк и разнообразен, поэтому государственный стандарт допускает применение *несистемных единиц*. Такими являются *десятичные кратные* (образованные умножением на 10, 100, 1000 и т. д.) и *десятичные дольные* (образованные умножением на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.) от единиц системы СИ. Для их обозначения вводятся специальные приставки.

2. Приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Название приставки	Обозначение приставки	Коэффициент умножения, соответствующий приставке	Примеры
Тера	Т	10^{12}	—
Гига	Г	10^{9}	гигаом, ГОм (10^{9} Ом)
Мега	М	10^{6}	мегаом, МОм (10^{6} Ом)
Кило	к	10^{3}	километр, км (10^{3} м)
Гекто	г	10^{2}	гектоватт, гВт (10^{2} Вт)
Дека	да	10^{1}	—
Деци	д	10^{-1}	дециметр, дм (10^{-1} м)
Санти	с	10^{-2}	сантиметр, см (10^{-2} м)
Милли	м	10^{-3}	миллиметр, мм (10^{-3} м)
Микро	мк	10^{-6}	микроампер, мкА (10^{-6} А)
Нано	н	10^{-9}	наносекунда, нс (10^{-9} с)
Пико	п	10^{-12}	пикофарада, пФ (10^{-12} Ф)
Фемто	ф	10^{-15}	—
Атто	а	10^{-18}	—

Примеры образования десятичных кратных и дольных единиц от единиц с составным наименованием: 1 МДж/кг = 10^{6} Дж/кг; 1 мкОм · м = 10^{-6} Ом · м.

3. Прочие несистемные единицы

Кроме единиц системы СИ, десятичных кратных и дольных от них, государственный стандарт допускает применение единиц, исторически сложившихся и прочно вошедших в быт, и единиц, специфических для тех или иных областей измерений. Приведем список таких единиц:

Единицы, допускаемые к применению наравне с единицами системы СИ

Физическая величина	Название единицы	Обозначение единицы	Значение в единицах системы СИ или определение
Время	минута	мин	60 с
	час	ч	3600 с
Масса	тонна	т	1000 кг
	центнер	ц	100 кг
Количество вещества	киломоль	кмоль	Киломоль — количество вещества, содержащее столько же молекул (атомов, частиц), сколько атомов содержится в нуклиде углерода C^{12} массой 12 кг (точно).
	моль	моль	10^{-3} кмоль
Температура	градус Цельсия	°C	t °C = T K — 273,15. Начало отсчета по шкале Цельсия сдвинуто вверх на 273,15° относительно шкалы Кельвина.
Плоский угол	полный угол	—	2π рад = 6,283... рад
	прямой угол	—	$\frac{\pi}{2}$ рад = 1,570... рад

Продолжение

Физическая величина	Название единицы	Обозначение единицы	Значение в единицах системы СИ или определение
	градус	°	$\frac{\pi}{180}$ рад = 1,745...·10⁻² рад
	минута	′	$\frac{\pi}{10800}$ рад = 2,908....·10⁻⁴ рад
	секунда	″	$\frac{\pi}{648000}$ рад = 4,848....·10⁻⁶ рад
Телесный угол	полный телесный угол	—	4 π ср = 12,56637... ср
	градус в квадрате	□°	3,046 ср
Площадь	гектар	га	10^4 м²
Объем	литр	л	10^{-3} м³
Скорость	километр в час	км/ч	$\frac{10}{36}$ м/с = 0,2777 м/с
Работа, энергия	киловатт-час	кВт·ч	3 600 000 Дж
Количество электричества	ампер-час	А·ч	3600 Кл

4. Система единиц СГС (или CGS)

До введения системы единиц СИ в науке широко применялась *система единиц СГС.*

Основными единицами системы СГС являются:

ед. длины — сантиметр, см;

ед. массы — грамм, г;

ед. времени — секунда, с.

Приведем некоторые производные единицы системы СГС и их связь с единицами системы СИ:

ед. силы — дина, дин (1 дин $=10^{-5}$ Н);

ед. работы — эрг, эрг (1 эрг $=10^{-7}$ Дж);

ед. магнитной индукции — гаусс, Гс (1 Гс $=10^{-4}$ Т);

ед. магнитного потока — максвелл, Мкс (1 Мкс $=10^{-8}$ Вб).

Многие единицы системы СГС не имели специального названия и обозначались таким образом:

ед. силы тока СГС (1 ед. силы тока СГС $=\frac{1}{3\cdot10^9}$ А);

ед. электрического напряжения СГС (1 ед. напряжения СГС $=300$ В) и т. п.

5. Алфавитный список единиц

Название единицы	Обозначение	Связь с единицами системы СИ
Ампер	А	Ед. силы тока системы СИ
Ампер-час	А·ч	3600 Кл (ед. количества электричества)
Ангстрем*	Å	10^{-10} м
Аршин**		Старая русская мера длины $=0{,}7112$ м
Атмосфера нормальная	атм	Ед. давления $=1{,}013\cdot10^5$ Па
Атмосфера техническая*	ат	Ед. давления $=9{,}81\cdot10^4$ Па

Продолжение

Название единицы	Обозначение	Связь с единицами системы СИ
Атомная единица массы	а.е.м.	1/12 массы атома углерода C^{12} = 1,66·10^{-27} кг
Бар*	бар	Ед. давления = 10^5 Па
Ватт	Вт	Ед. мощности системы СИ
Ватт-час	Вт·ч	Ед. энергии = 3 600 Дж
Вебер	Вб	Ед. магнитного потока системы СИ
Верста**		Старая русская мера длины = = 1066,8 м = 1,0668 км
Вершок**		Старая русская мера длины = = 4,445 см
Вольт	В	Ед. напряжения системы СИ
Вольт-ампер	В·А	Ед. полной мощности переменного тока
Вольт-ампер реактивный	вар	Ед. реактивной мощности переменного тока
Гаусс	Гс	Ед. магнитной индукции = = 10^{-4} Т
Гектар	га	10 000 м^2
Генри	Г	Ед. индуктивности системы СИ
Градус угловой	°	1/360 окружности = = $2\pi/360$ рад
Градус Реомюра**	°R	Устаревшая ед. температуры (T °R = 0,8 T °C)
Градус Фаренгейта**	°F	Устаревшая ед. температуры (T °F = 1,8 T °C+32°) (применяется в Англии и Америке)
Градус Цельсия	°C	T °C = T K − 273,15°

Продолжение

Название единицы	Обозначение	Связь с единицами системы СИ
Грамм	г	Ед. массы = 10^{-3} кг
Грамм-сила*	гс	Ед. силы = 10^{-3} кгс
Дециметр	дм	10^{-1} м
Джоуль	Дж	Ед. работы, энергии, теплоты в системе СИ
Дина	дин	Ед. силы = 10^{-5} Н
Диоптрия		Ед. оптической силы линзы, равная обратному фокусному расстоянию, выраженному в метрах
Дюйм		Английская единица линейных размеров=25,4 мм=2,54 см
Калория*	кал	Ед. теплоты = 4,18 Дж
Кандела	кд	Ед. силы света системы СИ
Кельвин	К	Ед. температуры системы СИ
Киловатт-час	кВт·ч	1000 Вт·ч = 3 600 000 Дж
Килограмм	кг	Ед. массы системы СИ
Килограмм-сила*	кгс	9,81 Н
Килограмм-сила-метр	кгс·м	Ед. механической работы = = 9,81 Дж
Килоджоуль	кДж	10^3 Дж
Килокалория*	ккал	1000 кал = $4,18 \cdot 10^3$ Дж
Километр	км	10^3 м
Километр в час	км/ч	Ед. скорости = $\frac{10}{36}$ м/с
Киломоль	кмоль	Ед. количества вещества (опр. стр. 14)
Кулон	Кл	Ед. количества электричества системы СИ
Литр	л	10^{-3} м^3

Продолжение

Название единицы	Обозначение	Связь с единицами системы СИ
Лошадиная сила*	л.с.	Ед. мощности = 75 кгс·м/с = = 736 Вт
Люкс	лк	Ед освещенности системы СИ
Люмен	лм	Ед. светового потока системы СИ
Максвелл	Мкс	Ед. магнитного потока = $= 10^{-8}$ Вб
Метр	м	Ед. длины системы СИ
Микрон	мк	10^{-6} м
Миллиграмм	мг	10^{-3} г = 10^{-6} кг
Миллиметр	мм	10^{-3} м
Миллиметр водяного столба*	мм вод.ст.	Ед. давления = 9,81 Па
Миллиметр ртутного столба*	мм рт.ст.	Ед. давления = 133 Па
Миля морская		1852 м = 1,852 км
Минута	мин	Ед. времени = 60 с
Моль	моль	10^{-3} кмоль
Ньютон	Н	Ед. механической силы системы СИ
Ом	Ом	Ед. электрического сопротивления системы СИ
Паскаль	Па	Ед. давления системы СИ
Пуд**		Старая русская мера веса (массы) = 16,38 кг
Пьеза	пз	Ед. давления = 10^3 Па
Радиан	рад	Ед. плоского угла системы СИ
Румб		Угловая мера=1/32 окружности=10°15′ (применяется в навигации)

Продолжение

Название единицы	Обозначение	Связь с единицами системы СИ
Сажень**		Старая русская мера длины = = 3 аршинам = 2,1336 м
Сантиметр	см	1. Ед. длины = 0,01 м 2. Ед. электрической емкости СГС = $\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ Ф 3. Ед. индуктивности СГС = $= 10^{-9}$ Г
Свеча	св	То же, что и кандела
Секунда	с	Ед. времени системы СИ
Стен**	сн	Ед. силы = 10^3 Н
Стерадиан	ср	Ед. телесного угла системы СИ
Тесла	Т	Ед. магнитной индукции системы СИ
Техническая единица массы*	т.е.м.	9,81 кг
Тонна	т	10^3 кг
Фарада	Ф	Ед. электрической емкости системы СИ
Фот	фт	Ед. освещенности = 10^4 лк
Центнер	ц	100 кг
Час	ч	3600 с
Электрон-вольт	эВ	Ед. энергии = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Эрг	эрг	Ед. энергии = 10^{-7} Дж

* Единицы, подлежащие изъятию из употребления к 1975 г.
** Единицы, не употребляемые в настоящее время.

IV. ВАЖНЕЙШИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Физическая постоянная	Обозначение, величина и размерность
Абсолютный нуль температуры	$-273,15$ °C
Атомная единица массы (1/12 массы атома углерода C^{12}), а.е.м.	1 а.е.м. $= 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг
Гравитационная постоянная	$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг²
Давление нормальной атмосферы	$p_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Па
Заряд электрона	$e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$ Г/м
Масса электрона	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса протона	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Объем килограмм-моля идеального газа при нормальных условиях	$V_0' = 22,4$ м³/кмоль
Скорость света в вакууме	$c_0 = 2,998 \cdot 10^8$ м/с
Универсальная газовая постоянная	$R = 8310$ Дж/(К·кмоль)
Ускорение силы тяжести (нормальное)	$g = 9,81$ м/с²
Число Авогадро (число молекул в килограмм-моле вещества)	$N_A = 6,02 \cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$
Число Фарадея (количество электричества, необходимое для электролиза одного килограмм-эквивалента вещества)	$F = 96,5 \cdot 10^6$ Кл/кг-экв
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

Обозначения единиц: Дж — джоуль, Г — генри, Кл — кулон, кг — килограмм, кмоль — килограмм-моль, кг-экв — килограмм-эквивалент, Н — ньютон, м — метр, Ф — фарада.

МАТЕМАТИКА

I. КВАДРАТЫ, КУБЫ, КВ. И КУБ. КОРНИ,

$$\pi n,\ \frac{\pi}{4}n^2,\ \frac{1}{n}$$

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\frac{\pi}{4}n^2$	$\frac{1}{n}$
0	0	0	0	0	0	0	$+\infty$
1	1	1	1,0000	1,0000	3,142	0,7854	1,00000
2	4	8	1,4142	1,2599	6;283	3,1416	0,50000
3	9	27	1,7321	1,4422	9,425	7,0686	0,33333
4	16	64	2,0000	1,5874	12,57	12,566	0,25000
5	25	125	2,2361	1,7100	15,71	19,635	0,20000
6	36	216	2,4495	1,8171	18,85	28,274	0,16667
7	49	343	2,6458	1,9129	21,99	38,485	0,14286
8	64	512	2,8284	2,0000	25,13	50,266	0,12500
9	81	729	3,0000	2,0801	28,27	63,617	0,11111
10	100	1000	3,1623	2,1544	31,42	78,540	0,10000
11	121	1331	3,3166	2,2240	34,56	95,033	0,09091
12	144	1728	3,4641	2,2894	37,70	113,10	0,08333
13	169	2197	3,6056	2,3513	40,84	132,73	0,07692
14	196	2744	3,7417	2,4101	43,98	153,94	0,07143
15	225	3375	3,8730	2,4662	47,12	176,72	0,06667
16	256	4096	4,0000	2,5198	50,27	201,06	0,06250
17	289	4913	4,1231	2,5713	53,41	226,98	0,05882
18	324	5832	4,2426	2,6207	56,55	254,47	0,05556
19	361	6859	4,3589	2,6684	59,69	283,53	0,05263
20	400	8000	4,4721	2,7144	62,83	314,16	0,05000
21	441	9261	4,5826	2,7589	65,97	346,36	0,04762
22	484	10648	4,6904	2,8020	69,12	380,13	0,04545
23	529	12167	4,7958	2,8439	72,26	415,48	0,04348
24	576	13824	4,8990	2,8845	75,40	452,39	0,04167
25	625	15625	5,0000	2,9240	78,54	490,87	0,04000
26	676	17576	5,0990	2,9625	81,68	530,93	0,03846
27	729	19683	5,1962	3,0000	84,82	572,56	0,03704
28	784	21952	5,2915	3,0366	87,97	615,75	0,03571
29	841	24889	5,3852	3,0723	91,11	660,52	0,03448
30	900	27000	5,4772	3,1072	94,25	706,86	0,03333

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\frac{\pi}{4} n^2$	$\frac{1}{n}$
31	961	29791	5,5678	3,1414	97,39	754,77	0,03226
32	1024	32768	5,6569	3,1748	100,5	804,25	0,03125
33	1089	35937	5,7446	3,2075	103,7	855,30	0,03030
34	1156	39304	5,8310	3,2396	106,8	907,92	0,02941
35	1225	42875	5,9161	3,2711	110,0	962,11	0,02857
36	1296	46656	6,0000	3,3019	113,1	1017,9	0,02778
37	1369	50653	6,0828	3,3322	116,2	1075,2	0,02703
38	1444	54872	6,1644	3,3620	119,4	1134,1	0,02632
39	1521	59319	6,2450	3,3912	122,5	1194,6	0,02564
40	1600	64000	6,3246	3,4200	125,7	1256,6	0,02500
41	1681	68921	6,4031	3,4482	128,8	1320,3	0,02439
42	1764	74088	6,4807	3,4760	131,9	1385,4	0,02381
43	1849	79507	6,5574	3,5034	135,1	1452,2	0,02326
44	1936	85184	6,6332	3,5303	138,2	1520,5	0,02273
45	2025	91125	6,7082	3,5569	141,4	1590,4	0,02222
46	2116	97336	6,7823	3,5830	144,5	1661,9	0,02174
47	2209	103823	6,8557	3,6088	147,7	1734,9	0,02128
48	2304	110592	6,9282	3,6342	150,8	1809,6	0,02083
49	2401	117649	7,0000	3,6593	153,9	1885,7	0,02041
50	2500	125000	7,0711	3,6840	157,1	1963,5	0,02000
51	2601	132651	7,1414	3,7084	160,2	2042,8	0,01961
52	2704	140608	7,2111	3,7325	163,4	2123,7	0,01923
53	2809	148877	7,2801	3,7563	166,5	2206,2	0,01887
54	2916	157464	7,3485	3,7798	169,7	2290,2	0,01852
55	3025	166375	7,4162	3,8030	172,8	2375,8	0,01818
56	3136	175616	7,4833	3,8259	175,9	2463,0	0,01786
57	3249	185193	7,5498	3,8485	179,1	2551,8	0,01754
58	3364	195112	7,6158	3,8709	182,2	2642,1	0,01724
59	3481	205379	7,6811	3,8930	185,4	2734,0	0,01695
60	3600	216000	7,7460	3,9149	188,5	2827,4	0,01667

Продолжение

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	πn	$\frac{\pi}{4} n^2$	$\frac{1}{n}$
61	3721	226981	7,8102	3,9365	191,6	2922,5	0,01639
62	3844	238328	7,8740	3,9579	194,8	3019,1	0,01613
63	3969	250047	7,9373	3,9791	197,9	3117,3	0,01587
64	4096	262144	8,0000	4,0000	201,1	3217,0	0,01563
65	4225	274625	8,0623	4,0207	204,2	3318,3	0,01538
66	4356	287496	8,1240	4,0412	207,4	3421,2	0,01515
67	4489	300763	8,1854	4,0615	210,5	3525,7	0,01493
68	4624	314432	8,2462	4,0817	213,6	3631,7	0,01471
69	4761	328509	8,3066	4,1016	216,8	3739,3	0,01449
70	4900	343000	8,3666	4,1213	219,9	3848,5	0,01429
71	5041	357911	8,4261	4,1408	223,1	3959,2	0,01408
72	5184	373248	8,4853	4,1602	226,2	4071,5	0,01389
73	5329	389017	8,5440	4,1793	229,3	4185,4	0,01370
74	5476	405224	8,6023	4,1983	232,5	4300,8	0,01351
75	5625	421875	8,6603	4,2172	235,6	4417,9	0,01333
76	5776	438976	8,7178	4,2358	238,8	4536,5	0,01316
77	5929	456533	8,7750	4,2543	241,9	4656,6	0,01299
78	6084	474552	8,8318	4,2727	245,0	4778,4	0,01282
79	6241	493039	8,8882	4,2908	248,2	4901,7	0,01266
80	6400	512000	8,9443	4,3089	251,3	5026,5	0,01250
81	6561	531441	9,0000	4,3267	254,5	5153,0	0,01235
82	6724	551368	9,0554	4,3445	257,6	5281,0	0,01220
83	6889	571787	9,1104	4,3621	260,8	5410,6	0,01205
84	7056	592704	9,1652	4,3795	263,9	5541,8	0,01190
85	7225	614125	9,2195	4,3968	267,0	5674,5	0,01176
86	7396	636056	9,2736	4,4140	270,2	5808,8	0,01163
87	7569	658503	9,3274	4,4310	273,3	5944,7	0,01149
88	7744	681472	9,3808	4,4480	276,5	6082,1	0,01136
89	7921	704969	9,4340	4,4647	279,6	6221,1	0,01124
90	8100	729000	9,4868	4,4814	282,7	6361,7	0,01111
91	8281	753571	9,5394	4,4979	285,9	6503,9	0,01099
92	8464	778688	9,5917	4,5144	289,0	6647,6	0,01087
93	8649	804357	9,6437	4,5307	292,2	6792,9	0,01075
94	8836	830584	9,6954	4,5468	295,3	6939,8	0,01063
95	9025	857375	9,7468	4,5629	298,5	7088,2	0,01052
96	9216	884736	9,7980	4,5789	301,6	7238,2	0,01042
97	9409	912673	9,8489	4,5947	304,7	7389,8	0,01031
98	9604	941192	9,8995	4,6104	307,9	7543,0	0,01020
99	9801	970299	9,9499	4,6261	311,0	7697,7	0,01010
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	314,2	7854,0	0,01000

II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ*

$=$	равно	например, $a = b$
$\neq$	не равно	» $a \neq b$
$\approx$	приближенно равно	» $a \approx b$
$>$	больше	» $a > b$
$<$	меньше	» $a < b$
$\geqslant$	больше или равно	» $a \geqslant b$
$\leqslant$	меньше или равно	» $a \leqslant b$
$\lvert a \rvert$	абсолютная величина числа	» $\lvert -2 \rvert = 2$
$\log_b$	логарифм при основании b числа N	» $\log_2 8 = 3$
$\lg N$	логарифм десятичный числа N	» $\lg 100 = 2$
lim	предел	
const	постоянная величина	
Σ	сумма	
$\triangle$	треугольник	например, $\triangle ABC$
$\angle$	угол	» $\angle ABC$
$\smile$	или $\frown$ дуга	» $\smile AB$ или $\frown AB$
$\parallel$	параллельно	» $AB \parallel CD$
$\perp$	перпендикулярно	» $AB \perp CD$
$\sim$	подобно	» $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
∞	бесконечность	
π	отношение длины окружности к диаметру	
sin	синус	
cos	косинус	
tg	тангенс	
ctg	котангенс	
sc	секанс	
csc	косеканс	
$^\circ$	градус	например, $10^\circ 30' 25''$
$'$	минута	
$''$	секунда	

* Здесь приведены лишь обозначения, наиболее часто встречающиеся в элементарной математике.

III. АЛГЕБРА

1. Сложение и вычитание относительных чисел

Пример:

$$(+8)+(+5)+(-7)-(+2)-(-3).$$

Сначала раскрывают скобки. При этом одинаковые знаки дают +, а разные знаки дают −. После раскрытия скобок складывают абсолютные значения отдельно всех положительных чисел, ставя перед результатом знак +, и отдельно всех отрицательных чисел, ставя перед результатом знак −. После этого находят разность абсолютных значений двух полученных чисел и ставят перед ней знак того из этих двух чисел, у которого абсолютное значение больше.

Запись в указанном примере ведется так:

$$(+8)+(+5)+(-7)-(+2)-(-3)=$$

$$=+8+5-7-2+3=+16-9=+7.$$

2. Умножение и деление относительных чисел

При умножении или делении двух относительных чисел умножаются или делятся их абсолютные значения и ставится перед результатом знак +, если у данных чисел одинаковые знаки, и знак −, если у них разные знаки.

Примеры:

$$(+8)\cdot(+2)=+16,\quad (-8)\cdot(-2)=+16,$$

$$(-8)\cdot(+2)=-16,$$

$$(+14):(+7)=+2,\quad (-14):(-7)=+2,$$

$$(-14):(+7)=-2.$$

Если нужно умножить и делить более двух относительных чисел, то производят действия над их абсолютными значениями; перед результатом ставят знак +, если среди данных чисел содержится четное число отрицательных чисел, и знак −, если их число нечетное.

Пример:

$$\frac{(+45)\cdot(-5)\cdot(+2)\cdot(-1)}{(+3)\cdot(-6)} = -25.$$

3. Умножение многочленов

При умножении многочленов каждый член одного многочлена умножают на каждый член другого и полученные произведения складывают.

Пример:

$$(a+b-c+d)\cdot(m-n+p) = am+bm-cm+$$
$$+dm-an-bn+cn-dn+ap+bp-cp+dp.$$

Если в результате имеются подобные члены, то делают их приведение.

Пример:

$$(3x^3-12x^2y+5xy^2-y^3)\cdot(x^2+xy-2y^2) =$$
$$=3x^5-\underline{12x^4y}+\underline{\underline{5x^3y^2}}-\underline{\underline{x^2y^3}}+\underline{3x^4y}-\underline{\underline{12x^3y^2}}+$$
$$+\underline{\underline{5x^2y^3}}-\underline{\underline{xy^4}}-\underline{\underline{6x^3y^2}}+\underline{\underline{24x^2y^3}}-\underline{\underline{10xy^4}}+2y^5 =$$
$$=3x^5-9x^4y-13x^3y^2+28x^2y^3-11xy^4+2y^5.$$

4. Формулы сокращенного умножения и разложения на множители

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \text{ (квадрат суммы)},$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \text{ (квадрат разности)},$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \text{ (куб суммы)},$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \text{ (куб разности)},$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

(произведение суммы на разность равно разности квадратов).

$$(a^3+b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

(разложение на множители суммы кубов),

$$(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

(разложение на множители разности кубов).

5. Основное свойство дробей

Величина дроби не изменяется, если числитель и знаменатель умножить (или разделить) на одно и то же число:

$$\frac{A}{B} = \frac{Am}{Bm} \text{ и } \frac{A}{B} = \frac{\frac{A}{m}}{\frac{B}{m}}.$$

На этом свойстве основано приведение дробей к одному знаменателю и сокращение дробей.

6. Сложение и вычитание дробей

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

(Дроби приводят к общему знаменателю, производят сложение или вычитание числителей и подписывают общий знаменатель).

7. Умножение дробей

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

(Умножают числитель на числитель и знаменатель на знаменатель и первое произведение берут числителем, а второе — знаменателем искомой дроби).

8. Деление дробей

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

(Умножают числитель первой дроби на знаменатель второй и это произведение берут числителем; умножают знаменатель первой дроби на числитель второй и это произведение берут знаменателем искомой дроби. Деле-

ние на дробь $\frac{c}{d}$ можно также заменить умножением на обратную ей дробь $\frac{d}{c}$).

9. Пропорция

Если между четырьмя числами существует такая зависимость, что отношение двух из них равно отношению двух других $(a:b=c:d)$, то такая зависимость называется *пропорцией*. Основное свойство пропорции: *произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов:*

$$ad=bc.$$

Производные пропорции

Из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ можно получить следующие *производные пропорции:*

$$\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c},\quad \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

10. Арифметическое и геометрическое средние

Полусумма $\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)$ двух величин a_1 и a_2 называется их *арифметическим средним*; арифметическим средним n величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется их сумма, деленная на их число: $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

Квадратный корень из произведения $(\sqrt{a_1a_2})$ двух величин a_1 и a_2 называется их *геометрическим средним*; геометрическим средним n величин называется корень n-й степени из их произведения: $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

11. Уравнение 1-й степени с одним неизвестным

Решение уравнения 1-й степени с одним неизвестным проводим следующим образом:

Путь решения	Пример: $\frac{9x+7}{2}+\frac{x-2}{7}=36+x$
Освобождаемся от знаменателей	$(9x+7)\cdot 7+(x-2)\cdot 2=(36+x)\cdot 2\cdot 7$
Раскрываем скобки	$63x+49+2x-4=504+14x$
Собираем члены, содержащие неизвестное (x), в левой части, а остальные—в правой части уравнения	$63x+2x-14x=504-49+4$
Делаем приведение подобных членов	$51x=459$
Делим обе части уравнения на коэффициент при неизвестном	$x=\frac{459}{51}=9$

Полученное значение неизвестного (x) называется *корнем* или *решением* данного уравнения. При подстановке этого значения в уравнение вместо неизвестного уравнение превращается в тождество.

В нашем примере:

$$\frac{9\cdot 9+7}{2}+\frac{9-2}{7}=36+9.$$

12. Система уравнений 1-й степени

Всякое уравнение 1-й степени с двумя неизвестными можно после упрощений привести к виду

$$ax+by=c$$

(«нормальный вид»).

Одно уравнение с двумя неизвестными x и y не имеет определенных решений. Решение *системы двух уравнений* с двумя неизвестными x и y заключается в нахождении значений, которые при подстановке в оба уравнения вместо x и y превращают оба уравнения в тождества.

Система двух уравнений решается путем исключения одного из двух неизвестных, что приводит систему к одному уравнению с одним неизвестным.

Наиболее часто применяемыми способами исключения неизвестных являются: а) *способ уравнивания коэффициентов* и б) *способ подстановки*. Те же способы исключения неизвестных применяются и для решения системы трех и более уравнений.

а) Решение способом уравнивания коэффициентов

Путь решения	Пример: $\begin{cases} 5x+14y=24 \\ 19x-21y=17 \end{cases}$
Уравниваем коэффициенты при каком-нибудь из неизвестных*, для чего умножаем каждое уравнение на некоторый множитель	1-е уравнение умножаем на 3, а 2-е — на 2. Тогда уравниваются коэффициенты при y: $\begin{array}{rcl} 5x+14y=24 & \mid 3 & \mid 15x+42y=72 \\ 19x-21y=17 & \mid 2 & \mid 38x-42y=34 \end{array}$
Складываем почленно оба уравнения (или вычитаем одно из другого) для исключения одного неизвестного	Складывая уравнения, исключаем y: $\begin{array}{rl} & 15x+42y=72 \\ + & 38x-42y=34 \\ \hline & 53x \quad\quad =106 \end{array}$
Решаем полученное уравнение с одним неизвестным	Находим корень x: $x=\frac{106}{53}=2$
Подставляем найденное значение одного неизвестного в одно из данных уравнений и находим значение другого неизвестного	Подставляем $x=2$ в 1-е уравнение и решаем его относительно y: $5\cdot 2+14y=24$, $14y=14$, $y=1$
	Решение системы уравнений (корни уравнений): $x=2,\ y=1$

* Вернее сказать, уравниваем абсолютные значения коэффициентов: они могут после уравнивания отличаться знаками, как в приведенном примере.

б) Решение способом подстановки

Путь решения	Пример: $\begin{cases} 5x+14y=24 \\ 19x-21y=17 \end{cases}$
Решаем одно из двух уравнений относительно какого-нибудь из неизвестных, рассматривая другое как известное	Решаем 1-е уравнение относительно y: $y=\frac{24-5x}{14}$ (*)
Подставляем найденное выражение для этого неизвестного во 2-е уравнение и тем самым исключаем из него это неизвестное	$19x-21\frac{24-5x}{14}=17$
Решаем полученное уравнение с одним оставшимся неизвестным	Решаем это уравнение относительно x: $19x-\frac{3(24-5x)}{2}=17$, $38x-72+15x=34$, $53x=106$, $x=2$
Подставляя найденное значение 2-го неизвестного в выражение для 1-го, находим значение 1-го неизвестного	Подставляя $x=2$ в (*), находим: $y=\frac{24-5x}{14}=\frac{24-5\cdot 2}{14}=1$
	Решение системы уравнений (корни уравнений): $x=2$, $y=1$

13. Возведение в степень

Произведение n одинаковых множителей: $a \cdot a \ldots a$ называется *n-й степенью* числа a и обозначается символом a^n (читается «a в n-й степени»). Нахождение n-й степени числа называется *возведением в степень*.

Пример: Возвести 2 в 5-ю степень. $2^5=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=32$.

Число a, которое берется несколько раз множителем, называется *основанием степени*, а число n, показываю-

щее, сколько раз повторяется основание — *показателем степени*. Так, в данном примере ($2^5=32$) число 2 — основание, число 5 — показатель степени, число 32 — степень.

2-я степень (a^2) иначе называется *квадратом* числа a (читается «a квадрат»); 3-я степень (a^3) — *кубом* числа a (читается «a куб»).

14. Извлечение корня

Извлечение корня есть действие, посредством которого по данной степени и данному показателю степени находится основание степени. Так, если $2^5 = 32$, то извлечение корня 5-й степени из 32 есть действие, посредством которого по данной степени (32) и данному показателю степени (5) находится основание степени (2). Для обозначения действия извлечения корня служит знак $\sqrt{\ }$, называемый *знаком корня*, или *радикалом*, а само действие обозначается для нашего примера так: $\sqrt[5]{32} = 2$; при этом число 32 называется *подкоренным числом*, число 5—*показателем корня*, а результат действия (2) — *корнем* (корнем 5-й степени из 32).

Корень 2-й степени $\left(\sqrt[2]{a}\right)$ иначе называется квадратным корнем из a, а корень 3-й степени $\left(\sqrt[3]{a}\right)$—кубическим корнем из a. Вместо $\sqrt[2]{a}$ всегда пишут $\sqrt{a}$, опуская показатель 2.

15. Знак перед корнем

При извлечении корня нечетной степени из числа a полученный корень имеет тот же знак, что и подкоренное число. Так, $\sqrt[3]{125} = 5$, $\sqrt[5]{-32} = -2$. При извлечении же корня четной степени из положительного числа получаем два решения с разными знаками. Так, $\sqrt{16} = +4$ и $\sqrt{16} = -4$ (сокращенно записывают $\sqrt{16} = \pm 4$). Корня же четной степени из отрицательного числа извлечь невозможно (в этом случае говорят, что значение такого корня *мнимое*).

16. Действия со степенями и корнями

Действие	Правило
Степень произведения	$(abc\ldots)^n = a^n b^n c^n \ldots$
Степень частного (дроби)	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
Умножение степеней с одинаковыми показателями	$a^n b^n c^n \cdots = (abc\ldots)^n$
Деление степеней с одинаковыми показателями	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Умножение степеней с одинаковыми основаниями	$a^m a^n = a^{m+n}$
Деление степеней с одинаковыми основаниями	$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Возведение степени в степень	$(a^m)^n = a^{mn}$
Корень из произведения	$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}$
Корень из частного (дроби)	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Умножение корней с одинаковыми показателями	$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$
Деление корней с одинаковыми показателями	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
Возведение корня в степень	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$
Извлечение корня из степени	$\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$
Извлечение корня из корня	$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$

17. Первая, нулевая, отрицательная и дробная степени

Для таких степеней приняты следующие условия:

$a^1 = a$ (например, $3^1 = 3$),

$a^0 = 1$ (например, $3^0 = 1$. «Всякое число в нулевой степени дает единицу»).

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \left(\text{например, } 3^{-2} = \frac{1}{3^2}\right),$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \left(\text{например, } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\right),$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \left(\text{например, } 3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}\right),$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \left(\text{например, } 3^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}\right).$$

18. Извлечение квадратного корня из чисел

Пример: Извлечь квадратный корень из 123 904.

Решение:

$\sqrt{12'39'04} = 352$

		9	
65	3	3'9	
5	3	2 5	
70	2	1 4	0'4
	2	1 4	0 4
			0

Разбиваем данное число на грани (справа, по две цифры): 12'39'04. Из первой грани (12) извлекаем корень точно или приближенно ($\sqrt{12} \approx 3$); полученное число (3) есть 1-я цифра искомого корня. Из 12 вычитаем 3^2 и к остатку (3) приписываем следующую грань (39). Затем удвоенную 1-ю цифру корня (6) приписываем слева от полученного числа (339), оставляя между обоими числами свободное место еще для одной цифры; оба числа отделяются друг от друга вертикальной черточкой. Разделив число десятков (33) полученного числа (339) на 6, получим вторую цифру (5) искомого корня (она может быть и нулем). Ее записывают в трех ме-

стах — в ответе, рядом с цифрой 6 и ниже; полученные слева от черты два числа перемножаются (65·5=325) и складываются (65+5=70). Произведение вычитаем из 339 и к остатку (14) приписываем следующую грань (04). (Если окажется, что вычитаемое больше уменьшаемого, то вторую цифру корня берут на единицу меньше). Для нахождения третьей цифры делим число десятков (140) полученного числа (1404) на предыдущую сумму (65+ +5=70). В данном примере 3-я цифра — 2, а в остатке получается нуль. Таким образом, число 352 является точным значением квадратного корня из 123 904. В других примерах корень может заключать и больше цифр; нахождение дальнейших цифр производится подобным же образом.

Если бы получился остаток, не равный нулю, то это означало бы, что подкоренное число не представляет точного квадрата. Так, если извлечь квадратный корень из 123 909, то получим остаток 5, а потому 352 будет не точным, а приближенным значением $\sqrt{123\,909}$, что записывается так: $\sqrt{123\,909} \approx 352$.

19. Извлечение квадратного корня с заданной точностью

Пример: Вычислить $\sqrt{9\,511\,956}$ с точностью до 0,01.

Решение: $\sqrt{9'51\,1\,9'5\,6} = 3084,14$

9	
608 | 8	51 1'9 48 6 4
6164 | 4	2 5 5 5'6 2 4 6 5 6
61681 | 1	9 0 00'0 6 1 68 1
616824 | 4	2 8 31 90'0 2 4 67 29 6
	3 64 60 4

20. Квадратные уравнения

Квадратное уравнение с одним неизвестным после алгебраических преобразований может быть представлено в виде

$$ax^2 + bx + c = 0$$

или в так называемой приведенной форме (если $a = 1$):

$$x^2 + px + q = 0.$$

Квадратное уравнение может иметь два решения, одно (в этом случае говорят, что оба решения совпадают) или ни одного (в этом случае говорят, что решения мнимые).

21. Формулы решения квадратных уравнений

Вид уравнения	Формула решения
$ax^2 + bx + c = 0$ (общий вид)	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ или $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$ (эту формулу удобно применять, если b — четное число).
$x^2 + px + q = 0$ (приведенное уравнение)	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (эту формулу удобно применять, если p — четное число).

22. Неполные квадратные уравнения

Если в квадратном уравнении

$$ax^2 + bx + c = 0$$

отсутствует свободный член ($c=0$) или второй член ($b=0$), то квадратное уравнение называется неполным. Решение неполных квадратных уравнений приведено в следующей таблице.

Вид уравнения	Формула уравнения
$ax^2+c=0$	$x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$
$ax^2+bx=0$	$x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$

23. Действительные и мнимые решения квадратных уравнений

1. Для полного квадратного уравнения. Если $b^2-4ac>0$, то квадратное уравнение имеет два действительных различных решения.

Например: $2x^2+x-1=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+4\cdot1\cdot2}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm3}{4};$$

$$x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=-1.$$

Если $b^2-4ac=0$, то квадратное уравнение имеет два действительных одинаковых решения («два решения совпадают»).

Например: $x^2-6x+9=0$;

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot9}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3.$$

Если $b^2 - 4ac < 0$, то квадратное уравнение имеет два мнимых решения.

Например: $3x^2 - x + 5 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{-59}}{6}.$$

2. Для неполного квадратного уравнения первого рода ($ax^2 + c = 0$). Если a и c разных знаков, то оба решения действительные.

Например:

$$4x^2 - 9 = 0; \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}.$$

Если a и c одинаковых знаков, то оба решения мнимые.

Например: $4x^2 + 9 = 0$;

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{9}{4}}.$$

3. Неполное квадратное уравнение второго рода ($ax^2 + bx = 0$) имеет всегда два действительных решения, одно из них — нуль.

24. Свойства корней квадратного уравнения (теорема Виета)

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

и

$$x_1 \cdot x_2 = +\frac{c}{a}.$$

В частном случае, если $a = 1$ (приведенная форма $x^2 + px + q = 0$), то

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = +q.$$

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту с обратным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Этими формулами удобно пользоваться для проверки решения квадратного уравнения, а также для составления квадратного уравнения по заданным его корням.

25. Разложение трехчлена 2-й степени на множители

Если x_1 и x_2—корни трехчлена 2-й степени ax^2+bx+c (т. е. решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$), то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Пример: Разложить на множители трехчлен $3x^2-5x-2$.

Решение. Находим корни данного трехчлена, т. е. корни квадратного уравнения $3x^2-5x-2=0$:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Представляем данный трехчлен в виде произведения

$$3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right).$$

Теперь результат можно упростить:

$$3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1).$$

26. Комплексные числа

1. *Мнимые числа.* Мнимым числом называется корень четной степени из отрицательного числа. Если взять отри-

цательное число $-m$, то $\sqrt{-m}$ будет мнимое число, которое можно представить так:

$$\sqrt{-m} = \sqrt{(-1)\,m} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{m}.$$

Введем новое число: $i = \sqrt{-1}$. Это число i назовем мнимой единицей. Числу i приписываем свойство, выражаемое равенством: $i^2 = -1$. Теперь мнимое число $\sqrt{-m}$ представим так:

$$\sqrt{-m} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{m} = i\sqrt{m}.$$

Действия над мнимыми числами производятся по тем же правилам, что и над числами вещественными.

2. *Степени числа* i. При производстве действий над мнимыми числами приходится иметь дело с различными степенями числа i. Находим эти степени:

$$i^1 = i;\ i^2 = -1;\ i^3 = i^2 \cdot i = -i;$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1;\ i^5 = i^{4+1} = i;$$

$$i^6 = i^{4+2} = i^2 = -1;\ i^7 = i^{4+3} = i^3 = -i \text{ и т. д.}$$

Вообще, если показатель степени числа i есть целое число n, большее 4, то его можно представить так: $n=4k$ или же $n = 4k + p$, где p может равняться 1, 2, 3. Если $n = 4k$, тогда $i^n = i^{4k} = 1$.

Если $n = 4k + p$, то $i^n = i^{4k+p} = i^p$.

Примеры:

$$i^{36} = i^{4 \cdot 9} = 1; \quad i^{23} = i^{4 \cdot 5 + 3} = i^3 = -i;$$

$$(2i)^4 = 16i^4 = 16; \quad (2i)^3 = 8i^3 = -8i; \quad (3i)(5i) = -15.$$

3. *Понятие о комплексных числах.* Числа вида $a + bi$ называются комплексными. Такие числа могут получиться при решении квадратных уравнений. Возьмем в качестве примера уравнение:

$$x^2 - 2x + 10 = 0.$$

Решаем это уравнение:

$$x = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm 3i;\ x_1 = 1+3i;\ x_2 = 1-3i.$$

4. *Алгебраическая форма комплексного числа.* Комплексное число вида $a+bi$ представляет собой алгебраическую форму комплексного числа. Число a называется вещественной частью комплексного числа, а bi — его мнимой частью. Два комплексных числа $a+bi$, $a-bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Два комплексных числа считаются равными между собою, если отдельно равны вещественные части и отдельно равны коэффициенты при i; так, если $a+bi=c+di$, то $a=c$; $b=d$. Отсюда следует, что комплексное число равняется нулю тогда, когда равны нулю его вещественная часть и коэффициент при i. Так, если $x+yi=0$, то $x=0$ и $y=0$. Вещественные и мнимые числа являются частными случаями чисел комплексных. Так, если $b=0$, то получим вещественное число a; если $a=0$, то получим мнимое число bi.

5. *Действия над комплексными числами.* Действия над комплексными числами производятся по тем же правилам, что и над алгебраическими двучленами.

27. Сложение комплексных чисел

Возьмем два комплексных числа:

$$m = a + bi, \quad n = c + di.$$

Находим их сумму:

$$m + n = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)\, i,$$

т. е. сумма есть число комплексное.

28. Вычитание комплексных чисел

Пусть $m = a + bi$; $n = c + di$. Находим разность:

$$m - n = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)\, i,$$

т. е. разность есть число комплексное.

29. Умножение комплексных чисел

Перемножим два комплексных числа:

$$m = a + bi, \quad n = c + di.$$

Находим

$$mn = (a + bi)(c + di) = ac + cbi + adi + bdi^2 =$$
$$= (ac - bd) + (cb + ad)i,$$

т. е. произведение есть число комплексное. Перемножим два сопряженных комплексных числа:

$$a + bi \text{ и } a - bi.$$

Находим

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2,$$

т. е. *произведение двух сопряженных комплексных чисел есть число вещественное и положительное.*

30. Деление комплексных чисел

Возьмем два комплексных числа:

$$m = a + bi \text{ и } n = c + di.$$

Найдем их частное:

$$\frac{m}{n} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} =$$

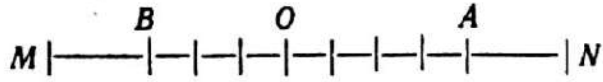
$$= \frac{ac + bci - adi - bdi^2}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i,$$

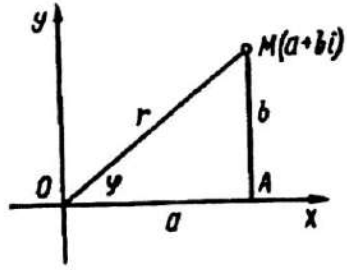
т. е. частное есть число комплексное.

31. Геометрическое представление комплексного числа

Возьмем прямую MN и на ней определенную точку O.



Точки, соответствующие положительным числам, расположены на прямой направо от точки O; точки же, соответствующие отрицательным числам, расположены налево от точки O. Так, чтобы найти на этой прямой точку, соответствующую числу 4, откладываем направо от точки O 4 раза отрезок, принятый за единицу. Точка A и будет являться изображением числа 4. Как видно из чертежа, точка B соответствует числу -3. Прямая MN называется числовой осью. Аналогично этому можно показать, что всякому комплексному числу $a+bi$ соответствует определенная точка плоскости. Для этого возьмем две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy, называемые осями.



Пусть a и b положительны. На оси Ox от точки O откладываем отрезок OA численно равный a; из точки A перпендикулярно к оси Ox проводим отрезок AM, численно равный b. Точка M и является изображением комплексного числа $a+bi$.

32. Тригонометрическая форма комплексного числа

Число, выражающее длину отрезка OM, обозначается через r; число r называется модулем комплексного числа $a+bi$. Как видно из чертежа,

$$r = \sqrt{a^2+b^2}. \qquad (1)$$

Угол xOM обозначается через φ; этот угол отсчитывается от оси Ox против часовой стрелки; угол φ называется фазой комплексного числа. Из чертежа определяем a и b:

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi. \tag{2}$$

Отсюда

$$a + bi = r\cos\varphi + ri\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3}$$

Выражение (3) и есть тригонометрическая форма комплексного числа.

Чтобы перейти от алгебраической формы $a + bi$ к тригонометрической, надо по заданным a и b определить r и φ. Имеем $r = \sqrt{a^2+b^2}$; из формул (2) находим

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}\ ;\ \sin\varphi = \frac{b}{r}\ . \tag{4}$$

Из формул (4) определяем φ; к φ можно прибавить $2k\pi$, где k — целое число, 2π — отношение длины окружности к радиусу.

Примеры: Представить в тригонометрической форме числа $4 + 4i$, 1, i.

1) $4 + 4i$; $r = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$;

$$\cos\varphi = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \sin\varphi = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

откуда

$$4 + 4i = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right];$$

2) 1; $1 = 1 + 0i$; $r = \sqrt{1+0} = 1$; $\cos\varphi = \frac{1}{1} = 1$;

$$\sin\varphi = \frac{0}{1} = 0;\ \ \varphi = 0 + 2k\pi,$$

откуда

$$1 = 1(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi);$$

3) i; $i = 0 + i$; $r = \sqrt{0+1} = 1$; $\cos\varphi = \frac{0}{1} = 0$;

$$\sin\varphi = \frac{1}{1} = 1;\ \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

откуда

$$i = 1\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right].$$

33. Действия над комплексными числами, выраженными в тригонометрической форме

1. *Умножение.* Даны числа: $m = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $n = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Перемножим их:

$$mn = r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\ldots$$

Вообще

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\ldots r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) = r_1r_2\ldots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)], \quad (5)$$

т. е. при перемножении нескольких комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.

2. *Возведение в степень.* При возведении комплексного числа в степень воспользуемся формулой (5):

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \overbrace{r r\cdots r}^{n}[\cos\overbrace{(\varphi+\varphi+\cdots+\varphi)}^{n} + i\sin\overbrace{(\varphi+\varphi+\cdots+\varphi)}^{n}] = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (6)$$

3. *Формула Муавра.* Положив в формуле (6) $r = 1$, получим формулу Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \quad (7)$$

При помощи формулы Муавра легко получить выражения синусов и косинусов кратных углов. Для примера най-

дем $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$. Положив в формуле (6) $n = 3$, получим

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi \cdot i\sin\varphi - \\ - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi. \quad (8)$$

Приравняв в разенстве (8) отдельно вещественные части и коэффициенты при i, получим

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

4. *Деление.* Исходя из правила умножения, получим

$$\frac{m}{n} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (9)$$

5. *Извлечение корня.* Положим, что

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = R(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Возводим обе части этого равенства в n-ю степень:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = R^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

У равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на $2k\pi$, где k — целое число.

Следовательно,

$$R^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi,$$

откуда

$$R = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Получим

$$\sqrt[n]{r\cos\varphi + i\sin\varphi} =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right]. \quad (10)$$

Для получения n различных значений корня полагаем $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. При помощи формулы (9) легко решаются двучленные уравнения.

Пример: Решить уравнение $x^3 - 5 = 0$.

Находим: $x^3 = 5$; $x = \sqrt[3]{5}$;

$$5 = 5(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi);$$

$$x = \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)} =$$

$$= \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i \sin\frac{2k\pi}{3}\right);$$

$$k = 0, 1, 2; \; x_1 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{0}{3} + i \sin\frac{0}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{5}(\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt[3]{5};$$

$$x_2 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}(-1 + i\sqrt{3});$$

$$x_3 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$$

34. Арифметическая прогрессия

Арифметическая (или *разностная*) *прогрессия* есть последовательность чисел $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, в которой разность (d) любых двух последовательных чисел («последующее» минус «предыдущее») есть величина постоянная; эта величина называется *разностью прогрессии*.

Например: 2, 5, 8, 11, ... (разность $d = 3$), числа возрастают, прогрессия *возрастающая*; 10, 6, 2, -2, ... (разность $d = -4$), числа убывают, прогрессия *убывающая*.

35. Формулы арифметической прогрессии

Для определения любого (n-го) члена прогрессии по заданному ее первому члену (a_1) и ее разности (d) имеем формулу

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1).$$

Сумма всех членов арифметической прогрессии подряд от 1-го до n-го члена определяется формулой

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2},$$

т. е. сумма n первых членов прогрессии равна полусумме первого и последнего членов, умноженной на n.

36. Геометрическая прогрессия

Геометрическая (или *кратная*) *прогрессия* есть последовательность чисел (a_1, a_2, a_3, ...), в которой отношение (q) любых двух последовательных чисел («последующее», деленное на «предыдущее») есть величина постоянная; эта величина q называется *знаменателем прогрессии*.

Например: 2, 6, 18, 54, ... (знаменатель $q = 3$), числа возрастают, прогрессия *возрастающая*; 12, 6, 3, 3/2, 3/4, ... (знаменатель $q = 1/2$), числа убывают, прогрессия *убывающая*.

37. Формулы геометрической прогрессии

Для определения любого (n-го) члена прогрессии по заданному ее первому члену (a_1) и ее знаменателю (q) имеем формулу

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Сумма всех членов геометрической прогрессии подряд от 1-го до n-го члена определяется формулой

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$ (если прогрессия возрастающая)

или формулой

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$$ (если прогрессия убывающая).

38. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Если в убывающей геометрической прогрессии не ограничиваться несколькими членами, а представлять себе число членов все время увеличивающимся, то величина этих членов будет приближаться к нулю.

Например: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ (знаменатель $q = \frac{1}{2}$), или 0,3; 0,03; 0,003; ...(знаменатель $q = 0,1$).

Такая прогрессия называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией.*

39. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Важное свойство бесконечно убывающей геометрической прогрессии: сумма ее членов от 1-го до n-го при безграничном увеличении числа членов (n) не растет беспредельно, а приближается к определенной «предельной» величине Этот предел называется *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии* и вычисляется по формуле

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Например: сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ приближается к числу

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2;$$

сумма $0{,}3+0{,}03+0{,}003+0{,}0003+\cdots$, или $0{,}3333\cdots$, приближается к числу

$$S=\frac{0{,}3}{1-0{,}1}=\frac{1}{3}.$$

40. Понятие логарифма

Логарифмирование есть действие, посредством которого по данной степени и по данному основанию степени находится показатель степени.

Если, например, по данной степени (32) и основанию степени (2) нужно найти показатель степени (в которую надо возвести 2, чтобы получить 32), то действие (логарифмирование) обозначается так: $\log_2 32=5$ (читается «логарифм 32 при основании 2 равен 5»). При этом число 2 называется *основанием логарифма*, а результат действия (5) — *логарифмом* числа 32 при основании 2.

[Сопоставляя действия возведения в степень, извлечения корня и логарифмирования, видим, что эти действия связаны друг с другом — три соотношения: $a^n=N$, $\sqrt[n]{N}=a$ и $\log_a N=n$ представляют одну и ту же зависимость между величинами a, n и N, причем искомыми являются в первом случае N (степень), во втором a (корень) и в третьем n (логарифм)].

41. Правила логарифмирования

Логарифм произведения:

$$\log(ab)=\log a+\log b.$$

Логарифм частного:

$$\log(a:b)=\log a-\log b.$$

Логарифм степени:

$$\log a^n=n\log a.$$

Логарифм корня:

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a.$$

(Все логарифмы в этих формулах берутся при одном и том же основании).

42. Десятичные логарифмы

Логарифмы при основании 10 называются *десятичными.* Целая часть такого логарифма называется его *характеристикой,* а дробная часть — *мантиссой.* Мантисса логарифма разыскивается в таблицах логарифмов, а характеристика определяется по следующему правилу: если число больше 1, то число единиц в характеристике равно числу знаков в целой части числа, уменьшенному на 1; если число меньше 1, то число отрицательных единиц в характеристике равно числу нулей, стоящих слева от первой значащей цифры числа (включая и «нуль целых»). Так, $\lg 375{,}85 = 2, \ldots$; $\lg 0{,}000245 = \overline{4}, \ldots$ (точки «...» проставлены вместо мантиссы, которая находится в таблицах логарифмов; lg — десятичный логарифм).

Приведем четырехзначные таблицы мантисс для чисел, имеющих не более трех значащих цифр подряд (например, 21; 3,04; 121; 0,0129; 90,1; 12 000 и т. п.). Для нахождения мантиссы можно не обращать внимания на положение запятой и на нули слева и справа, а искать мантиссы чисел: 21; 304; 121; 129; 901; 12.

В таблице а) даны мантиссы чисел от 1 до 10; в таблице б) — от 10 до 1000. Таблица б) имеет 10 столбцов, обозначенных наверху цифрами от 0 до 9. Для чисел от 10 до 99, расположенных в столбце N, мантиссы даются в столбце 0; для трехзначного же числа (например, 285) мантисса находится так: первые две его цифры (28) в столбце N указывают строку, в которой находится мантисса, а третья цифра (5) указывает столбец. Мантиссу находят на пересечении полученных строки и столбца. В данном случае мантисса будет 4 548, а $\lg 285 = 2{,}4548$, $\lg 2{,}85 = 0{,}4548$.

Наиболее распространены у нас четырехзначные таблицы (Брадиса) и пятизначные (Пржевальского).

43. Таблицы десятичных логарифмов

а) от 1 до 10

1	0000	6	7782
2	3010	7	8451
3	4771	8	9031
4	6021	9	9542
5	6990	10	0000

б) от 10 до 1000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*N*
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	10
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	11
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	12
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	13
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	14
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	15
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	16
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	17
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	18
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	20
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	21
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	22
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	23
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	24
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	25
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	26
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	27
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	28
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	29
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	30
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	31
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	32
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	33
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	34

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	35
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	36
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	37
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	38
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	39
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	40
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	41
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	42
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	43
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	44
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	45
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	46
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	47
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	48
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	49
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	50
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	51
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	52
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	53
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	54
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	55
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	56
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	57
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	58
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	59
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	60
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	61
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	62
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	63
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	64
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	65
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	66
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	67
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	68
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	69

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	70
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	71
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	72
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	73
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	74
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	75
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	76
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	77
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	78
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	79
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	80
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	81
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	82
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	83
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	84
85	9291	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	85
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	86
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	87
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	88
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	89
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	90
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	91
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	92
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	93
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	94
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	95
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	96
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	97
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	98
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	99

44. Логарифмы с отрицательной характеристикой

В случае десятичного логарифма дробного числа его характеристика отрицательна, но мантисса, отыскиваемая в таблицах, положительна. Поэтому в таком логарифме знак «—» (минус) ставится не перед, а над характеристикой, и логарифм имеет такой вид:

$$\lg 0{,}000245 = \bar{4}{,}3892.$$

Здесь 4 — отрицательно, а 0,3892 — положительно. Такая форма записи называется *неполным отрицательным логарифмом*, или *искусственной формой логарифма*, и читается не «минус 4,3892», а «четыре с минусом, 3892». При сложении и вычитании логарифмов удобно иметь дело с неполными отрицательными логарифмами; при умножении и делении иногда необходимо временно перейти к обычной, «*полной*» форме: $\bar{4}{,}3892 = -4 + 0{,}3892 = -3{,}6108$.

Правила перехода от неполной формы логарифма к полной:

1) абсолютная величина характеристики у неполного отрицательного логарифма на единицу больше, чем у полного; 2) все цифры мантиссы при переходе от одной формы логарифма к другой вычитаются из 9, а последняя значащая цифра — из 10; нули в конце остаются.

В примере $\bar{4}{,}3892$ вместо 3 ставится $9 - 3 = 6$
» 8 » $9 - 8 = 1$
» 9 » $9 - 9 = 0$
» 2 » $10 - 2 = 8$

45. Пример вычисления при помощи логарифмов

Вычислить

$$x = \frac{\sqrt[4]{3854} \cdot 0{,}8987^7}{\sqrt{4444} \cdot 0{,}0003875}.$$ *

Здесь $\lg x = \frac{1}{4}\lg 3854 + 7\lg 0{,}8987 - \frac{1}{2}\lg 4444 - \lg 0{,}0003875.$

* Использованы четырехзначные таблицы Брадиса; там же имеются пояснения, как этими таблицами пользоваться.

Вычисления удобно располагать по схеме:

$+\frac{1}{4}\lg 3854$ $7\lg 0{,}8987$	$\frac{1}{4}\cdot 3{,}5860$ $7\ \overline{1}{,}9536$	$0{,}8965$ $\overline{1}{,}6752$	$0{,}5717$
$+\frac{1}{2}\lg 4444$ $\lg 0{,}0003875$	$\frac{1}{2}\cdot 3{,}6478$ $\overline{4}{,}5883$	$1{,}8239$ $\overline{4}{,}5883$	$\overline{2}{,}4122$
$\lg x$	—	—	$2{,}1595$
x	—	—	$144{,}4$

46. Размещения

Размещениями из n элементов по k называются соединения, которые можно образовать из этих n элементов, собирая в каждое соединение по k элементов, при этом соединения могут отличаться друг от друга как самими элементами, так и порядком их расположения.

Например, из 3 элементов (a, b, c) по 2 можно образовать следующие размещения: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

47. Число размещений

Число всех возможных размещений, которые можно образовать из n элементов по k, обозначается символом A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)$$

(всего k множителей).

Пример: $A_8^5 = 8\cdot 7\ \ldots\ (8-5+1) = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6720$.

48. Перестановки

Перестановками из n элементов называются соединения, каждое из которых содержит все n элементов,

отличающихся поэтому друг от друга только порядком расположения элементов.

Например, из 3 элементов (a, b, c) можно образовать следующие перестановки: abc, bac, cab, acb, bca, cba.

49. Число перестановок

Число всех возможных перестановок, которые можно образовать из n элементов, обозначается символом P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$$

(Произведение n первых целых чисел обозначается символом «$n!$» и читается «*n факториал*».)

Пример: $P_5 = 5! = 120$.

50. Сочетания

Сочетаниями из n элементов по k называются соединения, которые можно образовать из этих n элементов, собирая в каждое соединение k элементов; при этом соединения отличаются друг от друга только самими элементами (различие порядка их расположения во внимание не принимается).

Например, из 3 элементов (a, b, c) по 2 можно образовать следующие сочетания: ab, ac, bc.

51. Число сочетаний

Число всех возможных сочетаний, которые можно образовать из n элементов по k, обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}.$$

(В числителе и знаменателе по k множителей).

Пример: $C_8^5 = \dfrac{A_8^5}{P_5} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56.$

Полезные формулы: $C_n^k = C_n^{n-k}$; $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Например: $C_8^5 = C_8^3$.

52. Бином Ньютона

Возведение двучлена $a + b$ в степень n может быть произведено по формуле, называемой разложением *бинома Ньютона:*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots +$$

$$+ C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

или (после подстановки выражений C_n^k с учетом формулы $C_n^k = C_n^{n-k}$):

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} a^{n-k}b^k + \ldots + nab^{n-1} + b^n.$$

Пример: $(a+b)^5 = a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 ab^4 + C_5^5 b^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$

53. Свойства бинома Ньютона

1. Разложение бинома $(a+b)^n$ представляет собой многочлен, расположенный по убывающим степеням a (от n-й до нулевой) и по возрастающим степеням b (от нулевой до n-й); сумма показателей a и b в каж-

дом члене разложения равна показателю степени бинома. Число членов разложения на единицу больше показателя степени бинома.

2. Коэффициенты членов разложения (*«биномиальные коэффициенты»*) возрастают до середины разложения и затем убывают; коэффициенты каждой пары членов, равноотстоящих от начала и конца разложения, равны между собой. Если n четное, то имеется один средний наибольший коэффициент, если n нечетное, то два наибольших.

3. При возведении в n-ю степень *разности* $a-b$ все четные члены разложения имеют знак «минус»:

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 - \ldots$$

54. Таблица биномиальных коэффициентов

Коэффициенты бинома Ньютона могут быть получены из так называемого *«треугольника Паскаля»*:

Бином	Треугольник Паскаля
$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
. . . . .	. . . . .

Каждый элемент образуется сложением двух элементов, стоящих над ним (слева и справа); таким же образом можно продолжить эту таблицу.

IV. ГЕОМЕТРИЯ

А. ПЛАНИМЕТРИЯ

(ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ)

55. Треугольники

Точки A, B, C — вершины тр-ка, углы при вершинах (углы тр-ка) обозначаются соответственно $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$; стороны тр-ка обычно обозначаются строчными буквами a, b, c соответственно противолежащим углам. Сумма длин всех сторон треугольника: $a+b+c$ (а также и всякого многоугольника) называется его *периметром* и обычно обозначается $2p$: $a+b+c=2p$.

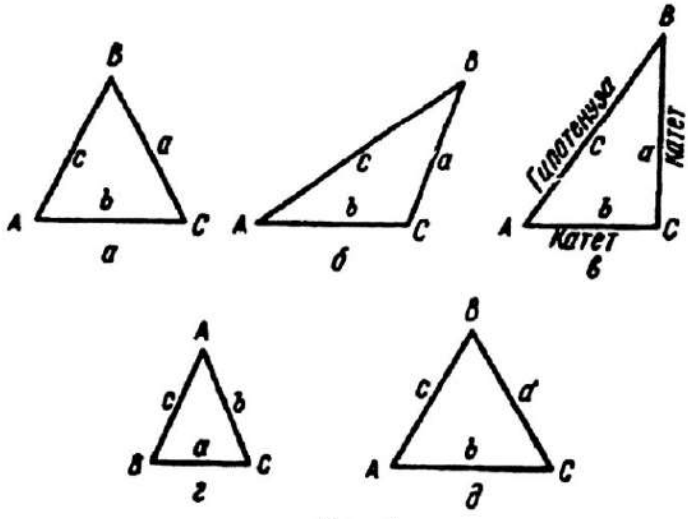


Рис. 1

На рис. 1, *а* тр-к *остроугольный* (все углы острые).

На рис. 1, *б* тр-к *тупоугольный*: один угол ($\angle C$) тупой.

На рис. 1, *в* тр-к *прямоугольный*: один угол ($\angle C$) прямой, $\angle A$ и $\angle B$ — острые углы, сторона c — *гипотенуза*, стороны a, b — *катеты*.

На рис. 1, *г* тр-к *равнобедренный*: две стороны равны ($b=c$), при этом равны и противолежащие углы: $\angle B=\angle C$.

На рис. 1, *д* тр-к *равносторонний*: все стороны равны ($a=b=c$), при этом равны и все углы: $\angle A=\angle B=\angle C$.

Площадь тр-ка и других фигур см. на стр. 66; основные формулы для тр-ка см. на стр. 65.

56. Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат

В *параллелограмме* (рис. 2) стороны попарно параллельны ($AB\|DC$ и $AD\|BC$). Основные свойства: $AB=DC$, $AD=BC$, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$; точка O пересечения диагоналей (AC и BD) есть середина каждой из них.

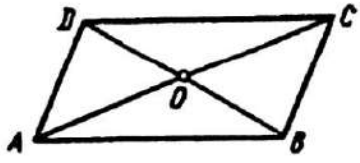


Рис. 2

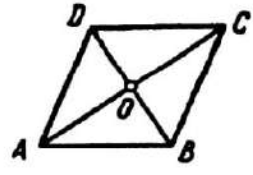


Рис. 3

Важнейшие частные случаи параллелограмма.

1. *Ромб* (рис. 3). Все стороны равны. Имеет все свойства параллелограмма. Кроме того, диагонали взаимно перпендикулярны ($AC\perp BD$) и являются биссектрисами

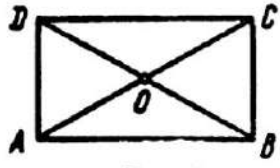


Рис. 4

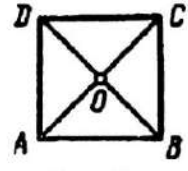


Рис. 5

углов ромба *. 2. *Прямоугольник* (рис. 4). Все углы прямые. Имеет все свойства параллелограмма. Кроме того, диагонали равны. 3. *Квадрат* (рис. 5). Все стороны равны и все углы прямые. Имеет все свойства прямоугольника и ромба.

* Определение биссектрисы см. на стр. 63.

57. Трапеция

Трапецией называется четырехугольник с двумя параллельными сторонами (рис. 6; $AB \| DC$). Стороны AB и DC — *основания*: AB — нижнее и DC — верхнее. BC и AD — *боковые стороны*. Отрезок EF, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией* трапеции; средняя линия трапеции параллельна обоим основаниям, и длина ее равна полусумме длин оснований:

Рис. 6

$$EF = \frac{1}{2}(AB + DC).$$

Если у трапеции боковые стороны равны, она называется *равнобочной* (рис. 7). Ее характерные свойства: углы при каждом основании равны между собой ($\angle A = \angle B$ и $\angle C = \angle D$); если продолжить боковые стороны до их пересечения в точке E, то образуются равнобедренные треугольники EAB и EDC.

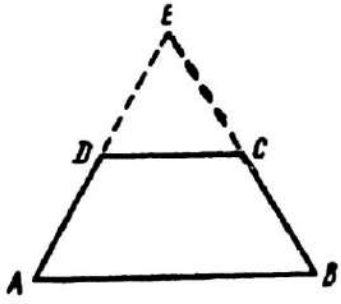


Рис. 7

58. Высота, медиана, биссектриса треугольника

Перпендикуляр, опущенный из любой вершины тр-ка на противолежащую сторону или на ее продолжение, называется *высотой* тр-ка (рис. 8; BD — высота). Отрезок прямой, соединяющий любую вершину тр-ка с серединой противолежащей стороны, называется *медианой* тр-ка (BE — медиана). Отрезок прямой, делящий пополам любой угол тр-ка, от вершины угла до противолежащей стороны называется *биссектрисой* тр-ка (BF — биссектриса), а сама прямая,

делящая пополам угол,— *биссектрисой* этого угла. Биссектриса разделяет сторону тр-ка на части, пропорциональные двум другим сторонам:

$$AF : FC = BA : BC.$$

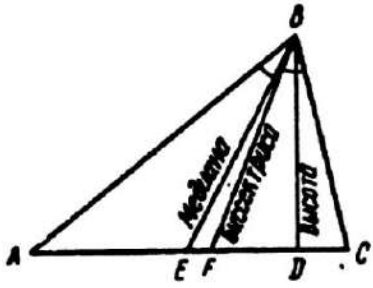


Рис. 8

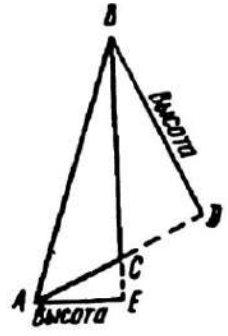


Рис. 9

В тупоугольном тр-ке все медианы и биссектрисы лежат внутри тр-ка, но две высоты, выходящие из острых углов, проходят вне его и падают на продолжения противолежащих сторон (рис. 9).

59. Четыре замечательные точки в треугольнике

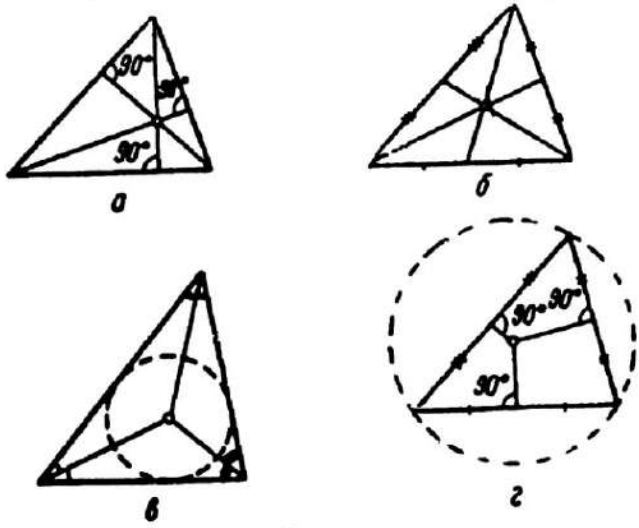


Рис. 10

1. Все три высоты каждого тр-ка пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром* тр-ка (рис. 10, *а*).

2. Все три медианы пересекаются в одной точке, являющейся *центром тяжести* тр-ка, он лежит на медиане, на расстоянии двух третей ее от соответствующей вершины (рис. 10, *б*).

3. Все три биссектрисы тр-ка пересекаются в одной точке, являющейся *центром вписанного круга* (рис. 10, *в*).

4. Все три перпендикуляра, восстановленные из середин сторон тр-ка, пересекаются в одной точке, являющейся *центром описанного круга* (рис. 10, *г*). В случае тупоугольного треугольника ортоцентр и центр описанного круга находятся не внутри, а вне треугольника.

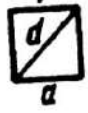
60. Основные формулы для треугольника*

Соотношение	Формула
Сумма углов	$\angle A + \angle B + \angle C = 2d$ (d — прямой угол)
Зависимость между сторонами тр-ка	$a + b > c$, $a - b < c$ (a, b, c — любые стороны тр-ка)
Зависимость между сторонами прямоугольного треугольника	*Теорема Пифагора:* $c^2 = a^2 + b^2$ (c — гипотенуза, a, b — катеты тр-ка)

* Тригонометрические формулы приведены систематически в разделе «Тригонометрия» (стр. 77—87).

61. Площади многоугольников

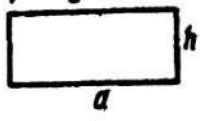
Квадрат



$S = a^2$

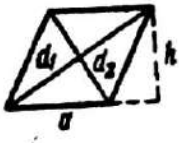
$S = \frac{1}{2} d^2$

Прямоугольник



$S = ah$

Ромб

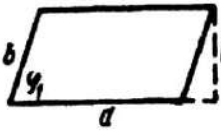


$S = ah$

$S = a^2 \sin \alpha$

$S = \frac{d_1 d_2}{2}$

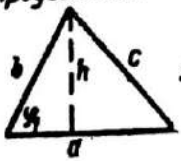
Параллелограмм



$S = ah$

$S = ab \sin \varphi$

Треугольник



$S = \frac{1}{2} ah, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \varphi,$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$

(формула Герона)

Равнобедренный треугольник

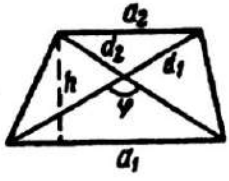
$S = \frac{a}{4} \sqrt{4b^2 - a^2}$

$S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha$

Равносторонний треугольник

$S = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$

Трапеция



$S = \frac{(a_1 + a_2) h}{2}$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$

Рис. 11

62. Правильные многоугольники

Обозначения (рис. 12): a — сторона многоугольника, R — радиус описанного около него круга, r — радиус вписанного в него круга (*апофема*), $2p$ — *периметр* и S — площадь многоугольника, α — угол между двумя соседними радиусами описанного круга ($\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, где n — число сторон многоугольника).

Рис. 12

Название мн-ка	Длина стороны a	Площадь S
Правильный треугольник (равносторонний)	$R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = 3r^2\sqrt{3}$
Правильный четырехугольник (квадрат)	$R\sqrt{2} = 2r$	$a^2 = 2R^2 = 4r^2$
Правильный шестиугольник	$R = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$	$\frac{3}{2} a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2} R^2\sqrt{3} = 2r^2\sqrt{3}$
Правильный n-угольник	$2R \sin\frac{\alpha}{2} = 2r \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$	$\frac{1}{2} nR^2 \sin\alpha = nr^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

63. Окружность и линии в окружности

Отрезок, соединяющий любую точку окружности с центром, называется радиусом окружности (OD, рис. 13).

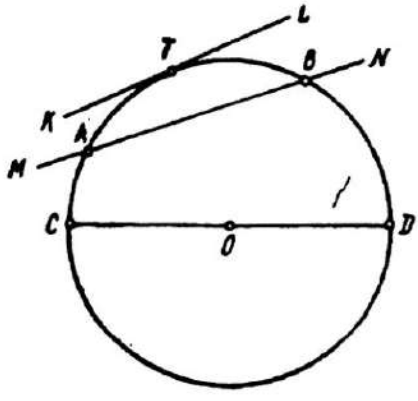


Рис. 13

Все радиусы окружности равны. Прямая, пересекающая окружность, называется *секущей* (MN); часть секущей, заключенная внутри окружности,—*хордой* (AB). Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром* (CD). Диаметр составлен из двух радиусов ($CD=OC+OD$). Прямая, имеющая одну общую точку с окружностью, называется *касательной* к окружности (KL). T — точка *касания*.

64. Круг и части круга

Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью. Всякая секущая делит круг на две части,

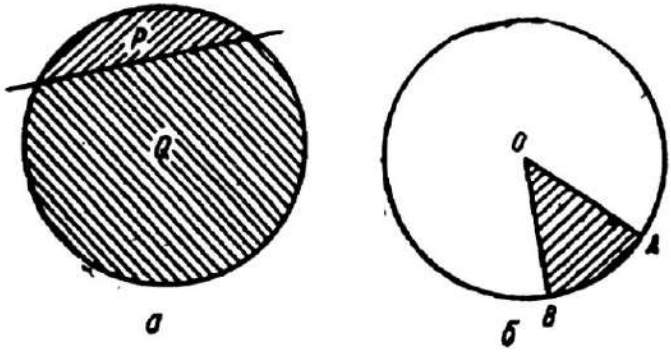


Рис. 14

называемые *сегментами* круга (*P*, *Q*, рис. 14, *а*). Диаметр делит круг на два равных сегмента. Часть круга, отсекаемая двумя радиусами, называется *сектором* круга (*AOB*, рис. 14, *б*). $\angle AOB$ — угол сектора, или *центральный угол*.

65. Расположение двух кругов

Взаимные положения двух кругов изображены на рис. 15. Круги могут находиться — один вне другого, один внутри другого (при этом если центры обоих кругов совпадают, окружности называются *концентрическими*); они могут пересекаться в двух точках и, наконец, касать-

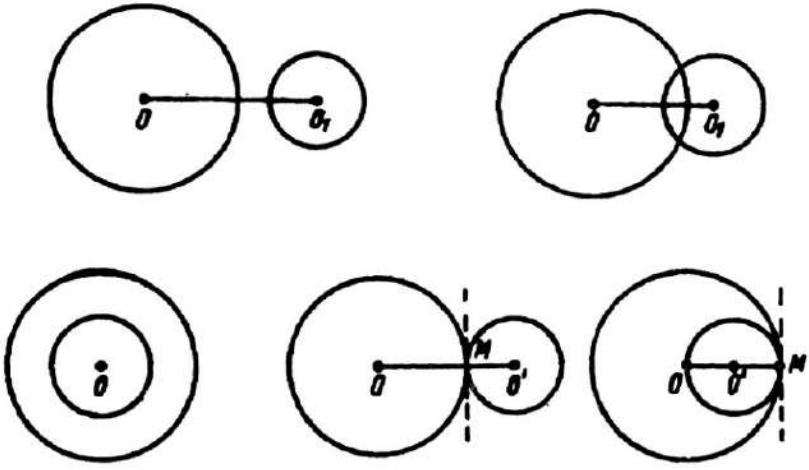


Рис. 15

ся друг друга в одной точке внешним или внутренним образом. При внешнем и внутреннем касании *линия центров* (*OO'*) проходит через точку касания (*M*).

Если два круга лежат целиком один вне другого (рис. 16), то можно к ним провести четыре общие касательные — две внешние и две внутренние. Точка пересечения внешних касательных и точка пересечения внутренних касательных лежат на линии центров.

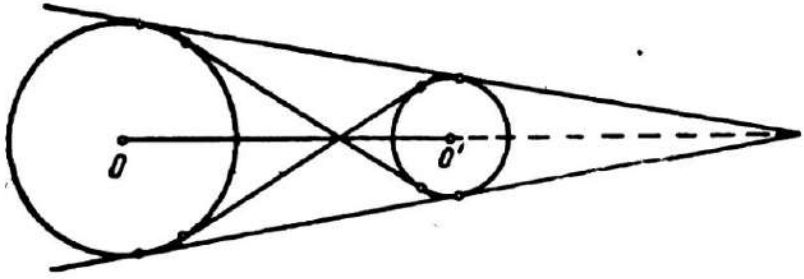


Рис. 16

66. Градусное измерение углов и дуг

1/90 часть прямого угла (т. е. 1/360 часть полного оборота) служит единицей измерения углов и называется *угловым градусом;* 1/60 часть градуса называется *угловой минутой*; 1/60 часть минуты называется *угловой секундой*. Если угол содержит, например, 15 градусов 30 минут 14 секунд, то это записывается так: 15°30′14″. Дуга, соответствующая центральному углу в один градус, есть *дуговой градус*. Дуговой градус также разделяется на *минуты* и *секунды*. Обозначения дуговых градусов, минут и секунд такие же, как и угловых.

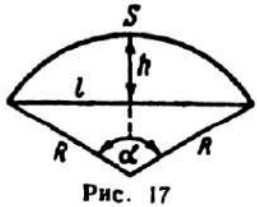
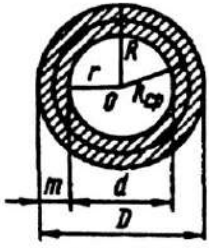
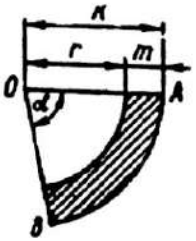
67. Число π

Длина окружности C всякого круга больше его диаметра D в определенное число раз, или, иначе, отношение $\frac{C}{D}$ — длины окружности к диаметру — постоянное число. Это число приблизительно равно 3,14, более точное его значение 3,14159...* Оно обозначается греческой буквой π.

68. Основные формулы для круга (длины и площади)

Длины и *площади*, рассматриваемые в круге, приведены в следующей таблице (R — радиус круга, D — диаметр):

* Это значение также не является совершенно точным, π—число иррациональное, его нельзя точно выразить никакой дробью.

Название	Формула
Длина окружности	$C = \pi D = 2\pi R$
Длина дуги с углом $\alpha°$	$v = \frac{\pi D \alpha}{360} = \frac{\pi R \alpha}{180}$
Площадь круга	$S_{кр} = \frac{1}{4}\pi D^2 = \pi R^2$
Площадь сектора с углом $\alpha°$	$S_{сект} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$
Элементы сегмента с центральным углом α (рис. 17). Длина хорды	$l = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$
 Рис. 17	
Длина дуги	$s = \frac{\pi R \alpha}{180}$ (α в градусах)
Радиус круга	$R = \frac{l^2 + 4h^2}{8h}$
Центральный угол	$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} = \frac{2h}{l}$
Длина стрелки (высота сегмента)	$h = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$
 Рис. 18	Площадь кольца (рис. 18) $S = \pi (R^2 - r^2) = \pi (R + r)(R - r) = 2\pi R_{ср} m$, где $R_{ср}$ — средний радиус, равный $\frac{R + r}{2}$, а $m = \frac{D - d}{2}$ — ширина кольца
Площадь части кольца (рис. 19)	$S = \frac{\pi (R^2 - r^2)\alpha}{360} = \frac{\pi (R + r)(R - r)\alpha}{360} = \frac{\pi R_{ср} m \alpha}{180}$, где α — угол AOB в градусах, а $R_{ср}$ и m имеют те же значения, что и выше
 Рис. 19	

Б. СТЕРЕОМЕТРИЯ

(ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ)

69. Многогранники

Призма. Основания $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ параллельны и равны. Боковые грани (например, $ABB'A'$) — параллелограммы. Боковые ребра (AA', BB' и т. д.) параллельны и равны. $KL = H$ — высота.

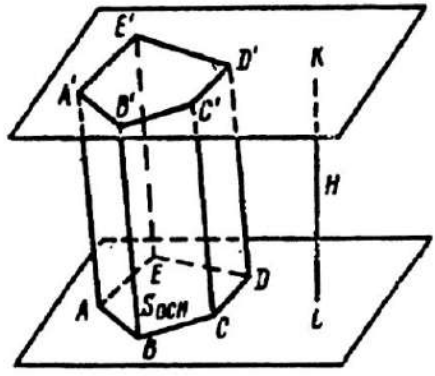
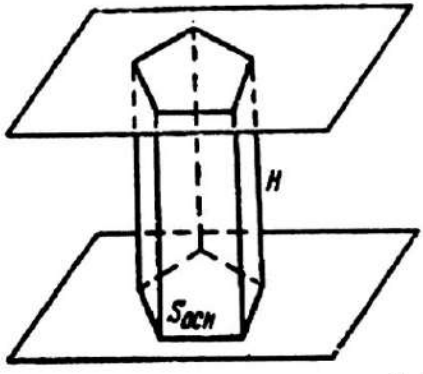


Рис. 20



Прямая призма. Боковые грани — прямоугольники. Высота равна боковому ребру.

Рис. 21

Правильная призма. Прямая призма, основания которой — правильные многоугольники.

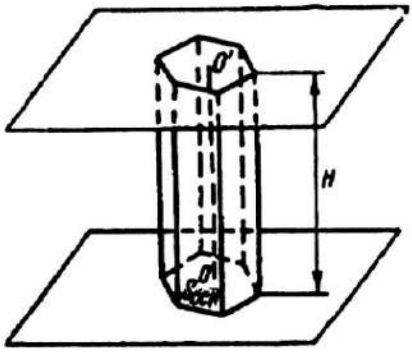


Рис. 22

Параллелепипед. Частный случай призмы: все грани (в том числе и основания) — параллелограммы.

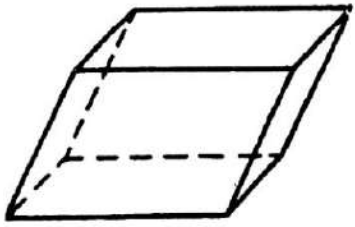


Рис. 23

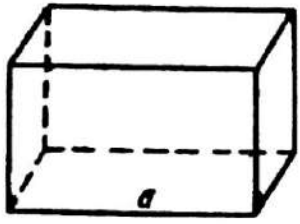


Рис. 24

Прямоугольный параллелепипед. Все грани — прямоугольники.

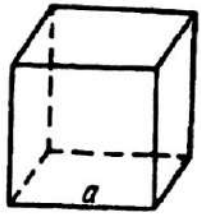


Рис. 25

Куб. Все грани — квадраты.

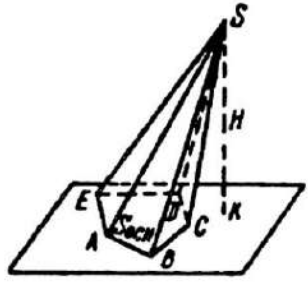


Рис. 26

Пирамида. В основании — многоугольник (*ABCDE*). Боковые грани (например, *SAB*) — треугольники. Высота — $SK = H$.

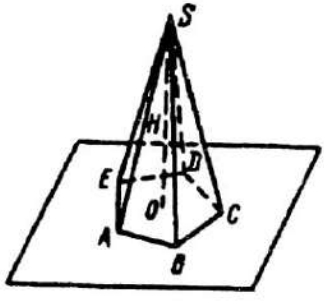


Рис. 27

Правильная пирамида. В основании — правильный многоугольник; боковые грани — равнобедренные тр-ки. Высота, опущенная из вершины *S*, проходит через центр *O* основания.

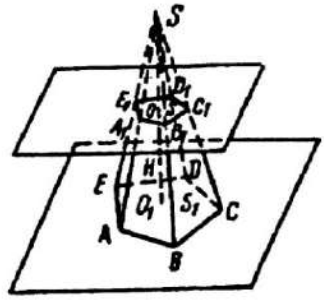


Рис. 28

Правильная усеченная пирамида. Правильная пирамида, часть которой с вершиной *S* срезана плоскостью, параллельной основанию.

70. Поверхности и объемы многогранников

Обозначения: p — периметр основания призмы или пирамиды, R — радиус описанного около основания круга, H — высота и l — боковое ребро призмы или пирамиды, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $S_{\text{бок}}$ — боковая поверхность, $S_{\text{полн}}$ — полная поверхность, V — объем.

а) *Призма*:

$$V = S_{\text{осн}}H, \quad S_{\text{бок}} = p'l,$$

где p' — периметр сечения призмы перпендикулярно боковому ребру.

б) *Прямая призма*:

$$S_{\text{бок}} = pH, \quad V = S_{\text{осн}}H.$$

в) *Прямоугольный параллелепипед*:

$$S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ca),$$
$$V = abc,$$

где a, b, c — измерения параллелепипеда: длина, ширина, высота.

г) *Куб*:

$$S_{\text{полн}} = 6a^2, \quad V = a^3.$$

д) *Пирамида*:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}}H.$$

е) *Правильная пирамида*: $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} pA$, где A — *апофема пирамиды* (высота равнобедренного тр-ка, являющегося боковой гранью пирамиды);

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}}H.$$

ж) *Правильная усеченная пирамида*:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)A,$$

где p_1 и p_2 — периметры оснований, A — *апофема усеченной пирамиды* (высота трапеции, являющейся боковой гранью пирамиды);

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})\,H,$$

где S_1, S_2 — площади оснований.

71. Поверхности и объемы круглых тел (цилиндра, конуса, шара и его частей)

Цилиндр (рис. 29):

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH, \quad S_{\text{полн}} = 2\pi R\,(H + R),$$
$$V = \pi R^2 H.$$

Конус (рис. 30):

$$S_{\text{бок}} = \pi Rl, \quad S_{\text{полн}} = \pi R\,(l + R)$$

(l — образующая конуса).

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Усеченный конус (рис. 31):

$$S_{\text{бок}} = \pi\,(R_1 + R_2)\,l,$$
$$S_{\text{полн}} = \pi R_1\,(l + R_1) + \pi R_2\,(l + R_2)$$

Рис. 29

Рис. 30

Рис. 31

(l — образующая усеченного конуса),

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2\right).$$

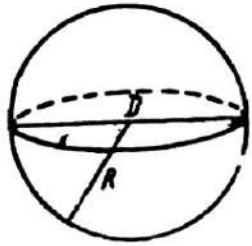


Рис. 32

Шар (рис. 32):

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2,$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$$

(D — диаметр шара).

Шаровой сегмент (рис. 33): $S = 2\pi Rh$
(поверхность кривой части без основания),

$$V = \frac{1}{6}\pi h\,(3r^2 + h^2),$$

где r — радиус основания, h — высота сегмента.

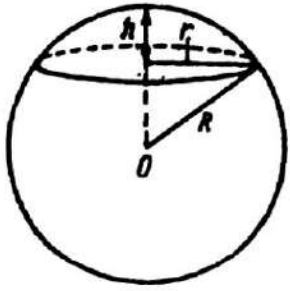


Рис. 33

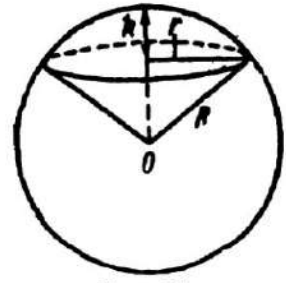


Рис. 34

Шаровой сектор (рис. 34):

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок. конуса}} + S_{\text{сегмента}} = \pi R\,(2h + r),$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Шаровой слой (рис. 35):

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$$

(поверхность кривой части без верхнего и нижнего оснований),

$$V = \frac{1}{6}\pi h\left[3\left(r_1^2 + r_2^2\right) + h^2\right],$$

где r_1 и r_2 — радиусы оснований, h — высота слоя.

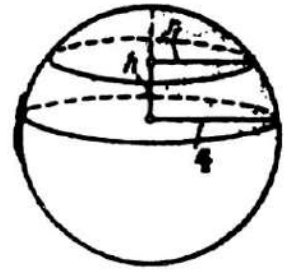


Рис. 35

V. ТРИГОНОМЕТРИЯ

72. Тригонометрические функции угла

Тригонометрические функции угла α (или A) определяются при помощи тригонометрического круга (для лю-

бых углов, рис. 36, *а*), а также из прямоугольного тр-ка (для острых углов, рис. 36, *б*):

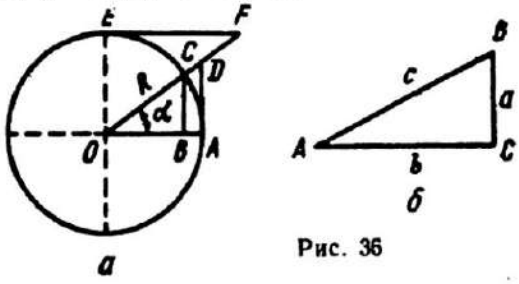


Рис. 36

$$\text{синус: } \sin\alpha = \frac{BC}{R}, \quad \sin A = \frac{a}{c},$$

$$\text{косинус: } \cos\alpha = \frac{OB}{R}, \quad \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\text{тангенс: } \operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{R}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b},$$

$$\text{котангенс: } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{EF}{R}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a},$$

$$\text{секанс: } \sec\alpha = \frac{OD}{R}, \quad \sec A = \frac{c}{b},$$

$$\text{косеканс: } \operatorname{csc}\alpha = \frac{OF}{R}, \quad \operatorname{csc} A = \frac{c}{a}.$$

73. Тригонометрические функции важнейших углов

Угол, *град*	Синус	Косинус	Тангенс
0	0	1	0
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	1	0	∞ (бесконечность)

74. Таблицы тригонометрических функций

Угол, *град*	Синус	Косинус	Тангенс	Угол, *град*	Синус	Косинус	Тангенс	Угол, *град*	Синус	Косинус	Тангенс
0	0,0000	1,0000	0,0000	15	0,2588	0,9659	0,2679	30	0,5000	0,8660	0,5774
1	0,0175	0,9998	0,0175	16	0,2756	0,9613	0,2867	31	0,5150	0,8572	0,6009
2	0,0349	0,9994	0,0349	17	0,2924	0,9563	0,3057	32	0,5299	0,8480	0,6249
3	0,0523	0,9986	0,0524	18	0,3090	0,9511	0,3249	33	0,5446	0,8387	0,6494
4	0,0698	0,9976	0,0699	19	0,3256	0,9455	0,3443	34	0,5592	0,8290	0,6745
5	0,0872	0,9962	0,0875	20	0,3420	0,9397	0,3640	35	0,5736	0,8192	0,7002
6	0,1045	0,9945	0,1051	21	0,3584	0,9336	0,3839	36	0,5878	0,8090	0,7265
7	0,1219	0,9925	0,1228	22	0,3746	0,9272	0,4040	37	0,6018	0,7986	0,7536
8	0,1392	0,9903	0,1405	23	0,3907	0,9205	0,4245	38	0,6157	0,7880	0,7813
9	0,1564	0,9877	0,1584	24	0,4067	0,9135	0,4452	39	0,6293	0,7771	0,8098
10	0,1736	0,9848	0,1763	25	0,4226	0,9063	0,4663	40	0,6428	0,7660	0,8391
11	0,1908	0,9816	0,1944	26	0,4384	0,8988	0,4877	41	0,6561	0,7547	0,8693
12	0,2079	0,9781	0,2126	27	0,4540	0,8910	0,5095	42	0,6691	0,7431	0,9004
13	0,2250	0,9744	0,2309	28	0,4695	0,8829	0,5317	43	0,6820	0,7314	0,9325
14	0,2419	0,9703	0,2493	29	0,4848	0,8746	0,5843	44	0,6947	0,7193	0,9657

Продолжение таблицы

Угол, *град*	Синус	Косинус	Тангенс	Угол, *град*	Синус	Косинус	Тангенс	Угол, *град*	Синус	Косинус	Тангенс
45	0,7071	0,7071	1,0000	60	0,8660	0,5000	1,732	75	0,9659	0,2588	3,732
46	0,7193	0,6947	1,0355	61	0,8746	0,4848	1,864	76	0,9703	0,2419	4,011
47	0,7314	0,6820	1,0724	62	0,8829	0,4695	1,881	77	0,9744	0,2250	4,331
48	0,7431	0,6691	1,1106	63	0,8910	0,4540	1,963	78	0,9781	0,2079	4,705
49	0,7547	0,6561	1,1504	64	0,8988	0,4384	2,050	79	0,9816	0,1908	5,145
50	0,7660	0,6428	1,1918	65	0,9063	0,4226	2,145	80	0,9848	0,1736	5,671
51	0,7771	0,6293	1,2349	66	0,9135	0,4067	2,246	81	0,9877	0,1564	6,314
52	0,7880	0,6157	1,2799	67	0,9205	0,3907	2,356	82	0,9903	0,1392	7,115
53	0,7986	0,6018	1,3270	68	0,9272	0,3746	2,475	83	0,9925	0,1219	8,144
54	0,8090	0,5878	1,3764	69	0,9336	0,3584	2,605	84	0,9945	0,1045	9,514
55	0,8192	0,5736	1,4281	70	0,9397	0,3420	2,747	85	0,9962	0,0872	11,43
56	0,8290	0,5592	1,482	71	0,9455	0,3256	2,904	86	0,9975	0,0698	14,30
57	0,8387	0,5446	1,5399	72	0,9511	0,3090	3,078	87	0,9986	0,0523	19,08
58	0,8480	0,5299	1,6003	73	0,9563	0,2924	3,271	88	0,9994	0,0349	28,64
59	0,8572	0,5150	1,6643	74	0,9613	0,2756	3,487	89	0,9998	0,0175	57,29
								90	1,0000	0,0000	∞

75. Формулы прямоугольных треугольников

Основные формулы для *решения прямоугольного треугольника* (кроме формул $\angle A+\angle B=90°$ и $a^2+b^2=c^2$):

$$a=c\sin A,\ b=c\cos A,\ a=b\operatorname{tg}A,\ b=a\operatorname{ctg}A,$$

$$b=c\sin B,\ a=c\cos B,\ b=a\operatorname{tg}B,\ a=b\operatorname{ctg}B.$$

По данному углу найдем из таблиц значения его тригонометрических функций или по значению какой-нибудь функции найдем из таблиц величину угла. При помощи этих формул по данному острому углу и одной из сторон прямоугольного треугольника можно найти другие стороны, а по данным двум сторонам — углы и третью сторону.

76. Решение прямоугольных треугольников

Дано	Решение
c, A	$B=90°-A$; $a=c\sin A$; $b=c\cos A$
a, A	$B=90°-A$; $b=a\operatorname{tg}B$; $c=\frac{a}{\sin A}$
c, a	$\sin A=\frac{a}{c}$; $B=90°-A$; $b=c\cos A$
a, b	$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}$; $B=90°-A$; $c=\frac{a}{\sin A}$

77. Тригонометрические функции углов, превышающих 90°

Если угол больше 90°, но меньше 360°, то его синус, косинус, тангенс и котангенс определяются следующим образом.

1. Находится разность между данным углом и ближайшим к нему из углов (180 или 360°) и вычисляется соответствующая функция от этой разности.

2. Перед результатом ставится знак «+» или «—» по таблице:

Функция	1-я четверть (от 0 до 90°)	2-я четверть (от 90 до 180°)	3-я четверть (от 180 до 270°)	4-я четверть (от 270 до 360°)
Синус	+	+	—	—
Косинус	+	—	—	+
Тангенс	+	—	+	—
Котангенс	+	—	+	—

Более наглядно знаки тригонометрических функций представлены на рис. 37.

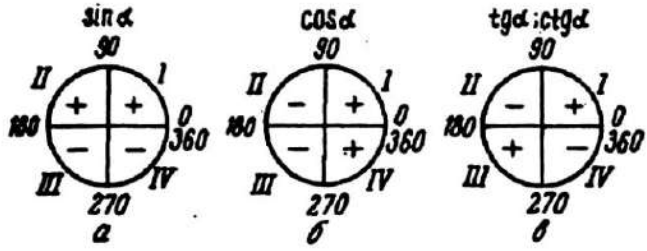


Рис. 37

Например:

$\sin 300° = -\sin 60° = -0{,}8660$ [360°—300°=60°];

$\cos 140° = -\cos 40° = -0{,}7660$ [180°—140°=40°];

$\operatorname{tg} 200° = +\operatorname{tg} 20° = +0{,}3640$ [200°—180°=20°].

Если же угол больше 360°, то из его величины вычитается целое число «полных оборотов» по 360° и рассматривается только величина остатка, меньшего 360°.

Например:

$\sin 1000° = \sin 280° = -\sin 80° = -0{,}9848$ [1000°—

—2·360°=280°; 360°—280°=80°].

78. Основные формулы тригонометрии

Основные *соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла*:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1;\ \frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha;\ \frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Выражение тригонометрических функций угла через одну какую-либо из них:

Дано	Решение
$\sin\alpha$	$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha};\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}};\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha};\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}};\ \cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}};\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$

Свойства *дополнительных углов* (дающих в сумме 90°):

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha;\ \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(90°-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha;\ \operatorname{ctg}(90°-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha;$$

Формулы тригонометрических функций *суммы* и *разности углов*:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$
$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Формулы тригонометрических функций *двойных углов:*

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$[\text{или } \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x, \ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1],$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Формулы тригонометрических функций *половинных углов:*

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$
$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

(знаки «+» или «—» определяются по таблице на стр. 82).

Употребительны также формулы:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

Формулы преобразования алгебраических сумм тригонометрических функций в произведения («приведение к виду, удобному для логарифмирования»):

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$
$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} =$$

$$= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin (x+y)}{\cos x \cos y},$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin (x-y)}{\cos x \cos y}.$$

Формулы преобразования произведений тригонометрических функций в алгебраические суммы:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin (x+y) + \sin (x-y)],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos (x+y) + \cos (x-y)],$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos (x+y) - \cos (x-y)].$$

79. Формулы косоугольных треугольников

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Теорема косинусов: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Теорема тангенсов: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}}$.

Выражение углов треугольника через его стороны*:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

* p здесь и дальше—полупериметр треугольника $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$.

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Выражение *радиуса описанного круга* через стороны и углы треугольника:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C},$$

$$R=\frac{a+b+c}{2(\sin A+\sin B+\sin C)},$$

или

$$R=\frac{p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Выражение *радиуса вписанного круга* через стороны и углы треугольника:

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

или

$$r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Выражение *площади треугольника* через его стороны и углы:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C \text{ и } S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$$

80. Решение косоугольных треугольников

Дано	Решение
a, b, c	$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
a, b, C	$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $B=180^\circ-(A+C)$
a, B, C	$A=180^\circ-(B+C)$; $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$; $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$
a, b, A	$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$; $C=180^\circ-(A+B)$; $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$

* Если $a>b$, то B имеет одно значение, меньшее 90°. Если $a<b$ (но $a>b\sin A$), то B имеет два значения: $B_1<90^\circ$ и $B_1=180^\circ-B_1$, и каждому из них соответствует свое значение для C и c. Таким образом, в этом случае задача допускает два решения (остроугольный и тупоугольный тр-ки).

Если $a<b$ и $a=b\sin A$, то $B=90^\circ$ (треугольник прямоугольный).

Если $a<b$ и $a=b\sin A$, то $\sin B>1$, что невозможно, и треугольника, удовлетворяющего условиям задачи, не существует.

МЕХАНИКА

1. Предмет механики и ее части

Механика — наука о движении и силах. Она делится на *кинематику* — раздел, в котором изучаются геометрические свойства движения без учета сил, которые его вызывают; *статику* — раздел, в котором изучается равновесие сил, и *динамику* — раздел, в котором изучается движение тел под действием приложенных к ним сил.

Кроме того, механика разделяется на: 1) механику абсолютно твердого тела, т. е. такого тела, которое ни при каких условиях не деформируется; 2) механику изменяемого твердого тела (сопротивление материалов) и 3) механику жидких и газообразных тел (гидро- и аэродинамика).

I. КИНЕМАТИКА

2. Поступательное движение

Движение тела называется *поступательным*, если все его точки движутся совершенно одинаково, так что вполне достаточно изучить движение одной точки для

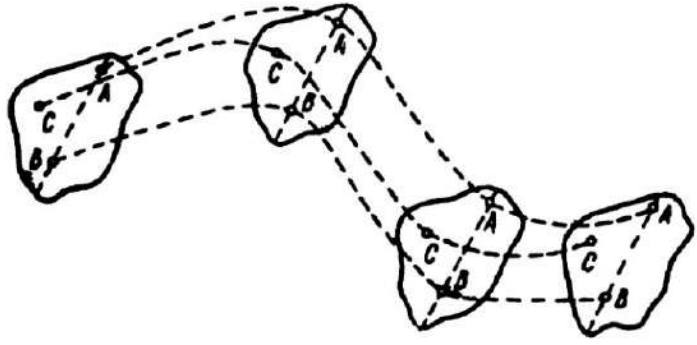


Рис. 38

того, чтобы знать движение всего тела. В поступательном движении всякая прямая, соединяющая любые две точки тела, во все время движения остается параллельной самой себе (рис. 38).

3. Траектория

Линия, которую описывает движущаяся точка, называется ее *траекторией*. Движения точки разделяются на *прямолинейные и криволинейные* в зависимости от вида траектории.

4. Закон движения

Движение точки вполне определяется, если известна траектория движущейся точки и задан *закон* ее *движения*, дающий в зависимости от времени расстояние движущейся точки от некоторой неподвижной начальной точки на траектории, причем расстояние измеряется по траектории. Это может быть сделано при помощи таблицы (например, расписание поездов), формулы или графика.

5. Равномерное движение

Движение называется *равномерным*, если в любые равные промежутки времени точка проходит одинаковые отрезки траектории. *Скорость равномерного движения* является постоянной и измеряется отношением пройденного пути s к тому времени t, в течение которого путь был пройден:

$$v = \frac{s}{t},$$

откуда следует

$$s = vt$$

(закон равномерного движения).

За единицу скорости принимается скорость такого равномерного движения, в котором в единицу времени проходится единица расстояния.

В системе СИ единица скорости — метр в секунду (м/с), а в системе СГС — сантиметр в секунду (см/с).

6. Вращательное движение

Вращательным движением, или *вращением*, называется такое движение твердого тела, при котором две его точки остаются во все время движения неподвижными; эти две неподвижные точки определяют проходящую через них прямую — *ось вращения*. Вращение называется равномерным, если в равные промежутки времени тело поворачивается вокруг оси на равные углы. Отношение угла поворота к соответствующему времени измеряет *угловую скорость* вращения.

За единицу угловой скорости на практике принимают *оборот в секунду* или *оборот в минуту*, т. е. угловую скорость такого равномерного вращения, в котором тело за единицу времени (секунду или минуту) делает один полный оборот вокруг оси. В системе СИ единицей угловой скорости является *радиан в секунду* (рад/с). Она представляет угловую скорость, при которой каждая точка тела за 1 секунду проходит путь, равный ее расстоянию от оси вращения. При этом все тело поворачивается на угол, равный приблизительно 57°17′ (один *радиан*). Формулы, выражающие угловую скорость вращения:

$$\omega = 2\pi n,$$

$$\omega = \frac{\pi N}{30} \approx 0{,}1N,$$

где ω—угловая скорость, n—число оборотов в секунду, N—число оборотов в минуту.

Если T—*период вращения* (время, за которое тело совершает полный оборот), то $T = \frac{1}{n}$, а угловая скорость

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

7. Линейная скорость при вращении

Скорость, с которой движется отдельная точка вращающегося тела, называется ее *линейной скоростью*. Она выражается формулами:

$$v = \omega r, \quad v = 2\pi r n, \quad v = \frac{2\pi r}{T},$$

где ω — угловая скорость вращения в рад/с, r—расстояние точки от оси вращения. Линейная скорость точек, лежащих на окружности вала или шкива, называется *окружной скоростью* вала или шкива.

8. Законы ременных передач и зубчатых колес

Окружные скорости двух шкивов, соединенных *ременной передачей* (рис. 39), или двух соприкасающихся *зубчатых колес* должны быть равны, откуда следует

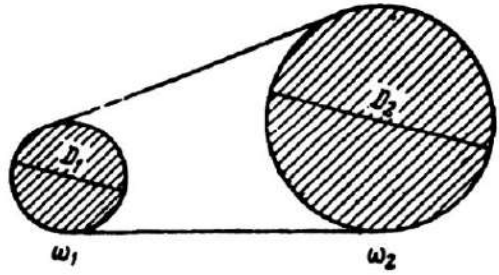


Рис. 39

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

или

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1},$$

где ω_1 и ω_2, r_1 и r_2 — соответственно угловые скорости и радиусы двух соединенных шкивов или колес. Таким образом, угловые скорости шкивов или колес обратно пропорциональны их радиусам или диаметрам D_1, D_2.

Отношение числа оборотов ведомого колеса (N_2) к числу оборотов ведущего (N_1) называется *передаточным числом:*

$$k = \frac{N_2}{N_1}.$$

Передаточное число равняется отношению диаметров D_1 и D_2 или чисел зубцов z_1 и z_2 ведущего и ведомого колес:

$$k = \frac{D_1}{D_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

9. Винтовое движение

Равномерным *винтовым движением* называется такое движение твердого тела, в котором оно равномерно вращается вокруг некоторой оси и в то же время совершает вдоль этой оси равномерное поступательное движение (рис. 40). Такое движение, например, мы придаем винту при его ввинчивании. *Шагом* h винта называется расстояние, на которое винт передвигается по оси за один оборот. Если v — скорость поступательного движения винта, n — число оборотов в секунду и ω — угловая скорость в радианах в секунду, то

Рис. 40

$$v = nh, \quad v = \frac{h}{2\pi}\omega.$$

10. Равноускоренное движение

Равноускоренным движением называется такое движение, в котором величина скорости все время увеличивается и это увеличение пропорционально времени. Получающееся при этом приращение скорости за каждую секунду называется *ускорением* (a). Ускорение в системе СИ измеряется в метрах в секунду в квадрате (м/с^2). В случае равноускоренного движения с начальной скоростью v_0 и ускорением a скорость v и путь s по истечении времени t выражаются формулами:

$$v = v_0 + at,$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

11. Законы падения тел

Свободное падение тела под действием силы тяжести является равноускоренным движением; в этом случае ускорение обозначается буквой g (*ускорение силы тяжести*):

$$g = 9{,}81 \text{ м/с}^2.$$

В свободном падении без начальной скорости ($v_0 = 0$) величины скорости и пути по истечении времени t выражаются формулами:

$$v = gt,$$

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

12. Нормальное, или центростремительное, ускорение

При равномерном движении точки по окружности скорость остается постоянной по величине, но все время меняется по направлению. Всякое изменение скорости связано с ускорением. Ускорение, изменяющее скорость по направлению, называется *нормальным*, или *центростремительным*. Это ускорение перпендикулярно (нормально) к траектории и направлено к центру ее кривизны (к центру окружности, если траектория — окружность).

Центростремительное ускорение равно

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

где v — скорость движения точки, R — радиус кривизны траектории. При движении точки по окружности центростремительное ускорение можно представить в виде

$$a_n = \omega^2 R$$

(так как $v = \omega R$, где R — радиус окружности).

13. Гармоническое колебание

Гармоническим колебанием называется периодическое движение, когда зависимость пройденного расстояния (s) от времени (t) происходит по закону синуса или косинуса:

$$s = A\cos(\omega t + \alpha_0),$$

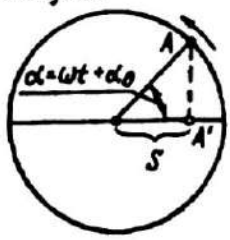


Рис. 41

где s — смещение тела относительно положения равновесия, A — амплитуда колебания, ω — круговая частота колебания, α_0 — начальная фаза, $\omega t + \alpha_0$ — фаза колебания.

Периодом колебания (T) называется длительность одного полного колебания или промежуток времени, через который процессы колебательного движения повторяются. Период и круговая частота связаны соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частотой колебания (ν) называется количество колебаний в 1 секунду:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Частота измеряется в герцах (гц).

Гармонические колебания тесно связаны с вращательным движением. При движении точки A (рис. 41) по окружности с постоянной угловой скоростью ω проекция ее (A') на диаметр окружности будет совершать гармоническое колебание, амплитуда которого равна радиусу окружности, а круговая частота равна угловой скорости вращения.

За один оборот точки по окружности ее проекция совершит одно полное колебание.

Материальная точка, подвешенная на нерастяжимой нити, называется *математическим маятником* (рис. 42). Колебания маятника при небольших ампли-

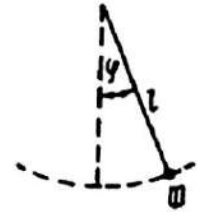


Рис. 42

тудах можно считать гармоническими. Период гармонических колебаний маятника зависит от длины (l) нити подвеса и ускорения силы тяжести (g):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Примечание. При амплитудах, превышающих 2—3°, колебания маятника нельзя считать гармоническими, в этом случае период зависит еще от амплитуды φ_0:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \varphi_0 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \varphi_0 \cdots\right].$$

II. СТАТИКА

14. Сила и ее изображение

По первому закону Ньютона (см. стр. 102) тело, предоставленное самому себе, находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. Всякая причина, изменяющая это состояние, называется *силой*. Сила определяется своей величиной, направлением и точкой приложения. Для измерения силы применяются следующие единицы: ньютон* (Н), грамм-сила (гс), килограмм-сила (кгс), тонна-сила (Т). Направление совпадает с направлением того движения, которое данная сила сообщила бы телу, находившемуся до приложения силы в состоянии покоя. Сила графически изображается *вектором* — отрезком, начало которого находится в точке приложения силы; указываемое стрелкой направление совпадает с направлением силы, и длина представляет в некотором масштабе величину силы (AB на рис. 43). Точка приложения силы, действующей на твердое тело, может быть без изменения действия силы взята где угодно на прямой, совпадающей с направлением силы (так называемые *линии действия силы*).

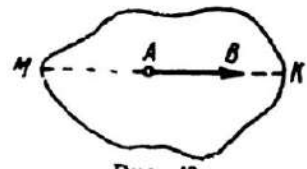


Рис. 43

* О единице силы в системе СИ — ньютоне см. стр. 102.

15. Равнодействующая сила

Равнодействующей силой двух или нескольких сил называется сила, могущая одна полностью заменить эти *составляющие силы*, т. е. произвести такое же изменение в состоянии равновесия или движения тела, что и все составляющие. Замена нескольких сил одной равнодействующей называется сложением сил. Если равнодействующая нескольких сил равна нулю, то эти силы не производят никакого действия — не изменяют состояния покоя или прямолинейного и равномерного движения, находятся в *равновесии*.

16. Правила сложения сил и законы их равновесия

1. Если силы *действуют по одной прямой* (имеют общую *линию действия*, рис. 44), то равнодействующая сила имеет ту же линию действия; по величине она равна разности между суммой величин сил, действующих в одну сторону, и суммой величин сил, действующих в другую сторону; направлена она в ту сторону, где эта сумма больше.

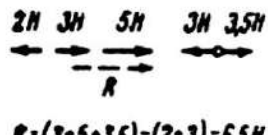


Рис. 44

Для равновесия таких сил необходимо, чтобы суммы величин сил, действующих в одну сторону, равнялись сумме величин сил, действующих в другую сторону; если таких сил две, то они только тогда находятся в равновесии, когда равны по величине и направлены в противоположные стороны.

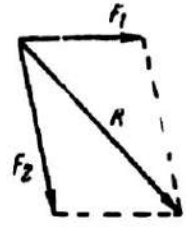
2. Если две силы приложены к одной точке и *расположены под углом* друг к другу (рис. 45), то равнодействующая по величине и направлению изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах, изображающих складываемые силы (закон *параллелограмма сил*).

Такие две силы никогда не могут быть в равновесии.

3. Если в одной точке приложены три и больше силы (рис. 46), то для получения их равнодействующей следует из векторов составляющих сил F_1, F_2, F_3, F_4,... по-

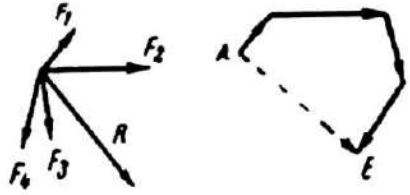
строить ломаную линию; ее замыкающая (AE на рис. 46) представит по величине и направлению равнодействующую силу.

Для равновесия таких сил ломаная должна замкнуться («замыкающая должна равняться нулю»). В случае трех сил они должны образовать треугольник (рис. 47).



R-равнодействующая F_1 и F_2

Рис. 45



R-равнодействующая F_1, F_2, F_3 и F_4

Рис. 46

4. Если две силы *параллельны* и направлены *в одну сторону* (рис. 48), то равнодействующая сила по величине равна сумме величин составляющих сил, направлена в ту же сторону и делит прямую, соединяющую точки приложения составляющих сил, обратно пропорционально их величинам. Такие силы никогда не могут быть в равновесии.

Рис. 47

5. Если две силы *параллельны* и направлены в *противоположные стороны* (рис. 49), то равнодействующая сила по величине равна разности величин составляющих

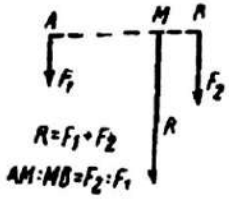


Рис. 48

Рис. 49

сил, направлена в сторону большей и делит прямую, соединяющую точки приложения составляющих сил, внешним образом обратно пропорционально их величинам.

Такие силы также никогда не могут быть в равновесии. Если силы F_1 и F_2 равны по величине и противоположно направлены, то они не имеют равнодействующей, но производят вращательное движение тела. Такие две силы образуют так называемую *пару сил*.

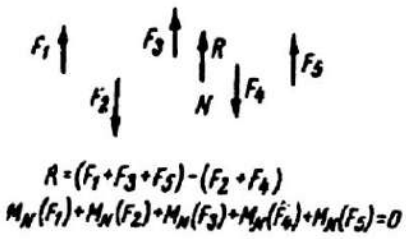


Рис. 50

6. Если имеется несколько параллельных сил (рис. 50), то их равнодействующая будет также параллельна им и по величине равна разности между суммой сил, действующих в одну сторону, и суммой сил, действующих в другую сторону (как и в случае 1). Она приложена в такой точке, относительно которой сумма моментов* всех составляющих сил равна нулю.

Для равновесия таких сил необходимо, чтобы сумма величин сил, действующих в одну сторону, равнялась сумме величин сил, действующих в другую сторону, и, кроме того, чтобы сумма их моментов относительно любого центра равнялась нулю; в противном случае они могут образовать пару сил.

17. Момент силы

Моментом силы относительно оси вращения называется произведение действующей силы F на плечо d, представляющее кратчайшее расстояние между осью вращения OO' и линией действия силы AA' (рис. 51):

$$M = Fd.$$

* О моментах сил см. далее.

Момент силы считается положительным или отрицательным в зависимости от того, стремится ли он вращать тело по часовой стрелке или против.

За единицу измерения момента силы в системе СИ принимается ньютон-метр (Н·м).

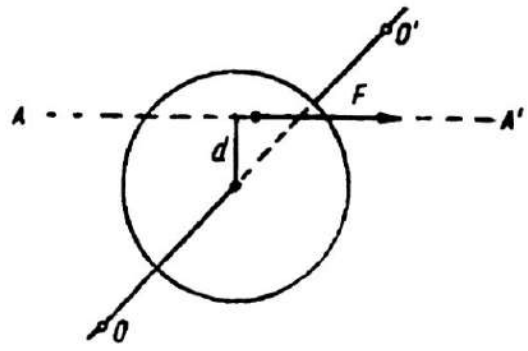


Рис. 51

18. Теоремы о моментах сил

Момент равнодействующей силы равняется сумме моментов составляющих сил.

Для того чтобы тело, имеющее ось вращения, находилось в равновесии, необходимо, чтобы сумма моментов относительно этой оси равнялась нулю (или, иначе, сумма моментов, стремящихся повернуть тело в одну сторону, должна быть равна сумме моментов, стремящихся повернуть тело в другую сторону).

Для того чтобы тело с одной неподвижной точкой находилось в равновесии, необходимо, чтобы равнялись нулю моменты сил относительно любых трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через неподвижную точку.

19. Центр тяжести

Центром тяжести данного тела называется точка приложения равнодействующих сил веса всех частиц, составляющих данное тело (точнее, точка пересечения линий действия равнодействующих сил веса при различных положениях тела относительно вертикали). Если P_1, P_2, P_3, ...— веса этих частиц, x_1, x_2, x_3, ...— расстояния их до некоторой плоскости, то расстояние x_0 центра тяжести тела до той же плоскости выразится формулой

$$x_0 = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}.$$

В случае равновесия тяжелого тела вертикаль, проведенная через центр тяжести, должна пройти через точку опоры M (рис. 52, *а*) или внутри контура, образованного крайними точками опоры тела (рис. 52, *б*).

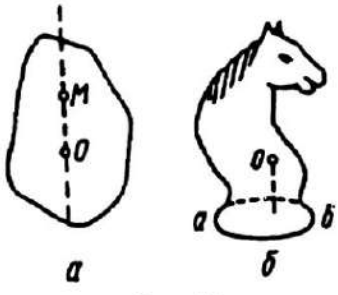


Рис. 52

Если в положении равновесия центр тяжести занимает наивысшее положение, то равновесие будет *неустойчивым*, если наинизшее, то *устойчивым*; наконец, если при небольших отклонениях от положения равновесия высота центра тяжести не меняется, то равновесие будет *безразличным*. Пример: равновесие шара на выпуклой поверхности, на вогнутой и на плоскости.

20. Центры тяжести простых геометрических фигур и тел

Чертеж	Положение центра тяжести (O)
а — O	*а — отрезка прямой*—в его середине
б — O	*б—окружности* — в ее центре
в — O	*в — треугольника* — в точке пересечения его медиан
г — O	*г — параллелограмма* — в точке пересечения его диагоналей

Продолжение

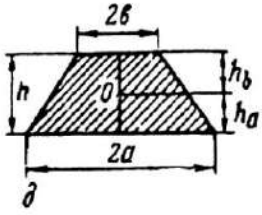
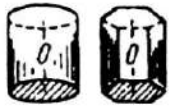
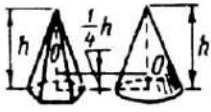
Чертеж	Положение центра тяжести (*O*)
 *д*	*д — трапеции*: 1) на прямой, соединяющей середины оснований, 2) на расстоянии $h_a = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$ от основания a и на расстоянии $h_b = \frac{h}{3} \times \frac{b+2a}{a+b}$ от основания b
е	*е — круга* — в его центре
ж	*ж* — небольшого *сегмента* — на оси его симметрии, на расстоянии $^2/_5 h$ от основания
з 	*з — призмы* и *цилиндра* — на середине прямой, соединяющей центры тяжести верхнего и нижнего оснований
и 	*и — пирамиды* и *конуса* — на прямой, соединяющей центр основания с вершиной, на расстоянии $^1/_4$ этой прямой от основания
к	*к — шара*—в его центре
л	*л — полушария* — на оси его симметрии, на расстоянии $^3/_8$ радиуса от центра шара

Рис. 53

III. ДИНАМИКА

21. Основные законы динамики (законы Ньютона)

1. Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока этому не воспрепятствуют внешние действующие на тело силы (*закон инерции*).

2. Ускорение, сообщаемое телу данной силой, прямо пропорционально величине этой силы и обратно пропорционально массе тела.

3. Силы взаимодействия двух тел равны по величине и противоположны по направлению *(закон равенства действия и противодействия)*.

22. Основное уравнение динамики

Сила F равна произведению массы тела m на ускорение a, которое сила сообщает телу:

$$F = ma. \qquad (1)$$

23. Единицы силы

Из формулы (1) вытекает определение единицы силы в системе СИ. За единицу силы — 1 ньютон (1 Н) — принимается сила, которая массе 1 килограмм сообщает ускорение, равное 1 м/с². Если в формуле (1) m выражено в килограммах, a — в м/с², то сила F будет выражаться в ньютонах.

Другая единица силы — 1 *килограмм-сила* (кгс) — есть сила, с которой 1 килограмм массы притягивается к Земле. Иначе килограмм-сила есть сила, сообщающая массе 1 кг ускорение 9,81 м/с². Отсюда следует

$$1 \text{ кгс} = 9{,}81 \text{ Н}.$$

24. Вес

Вес тела (P) представляет собой силу, с которой тело притягивается к Земле, т. е. силу, которая сообщает телу ускорение 9,81 м/с².

Вес тела, выраженный в кгс, численно совпадает с массой тела, выраженной в кг.

В системе СИ вес измеряется в ньютонах (Н), а масса — в килограммах (кг), поэтому соотношение между массой и весом следующее:

$$P = mg,$$

где g — ускорение свободного падения (g=9,81 м/с²).

25. Центростремительная сила

На материальную точку, вращающуюся по окружности, действует *центростремительная сила*, сообщающая точке центростремительное ускорение (см. стр. 93). Центростремительная сила направлена к центру окружности и по величине равна

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

или

$$F = m\omega^2 R,$$

где m — масса материальной точки, v — ее линейная скорость, R — радиус окружности, ω — угловая скорость.

Центростремительная сила не производит работы, так как всегда направлена перпендикулярно движению; изменяет направление скорости, но не величину.

26. Работа

Сила F, передвигающая тело по некоторому пути s, производит работу. В простейшем случае, если направление силы F и перемещения s совпадают, работа A является произведением силы на путь:

$$A = Fs.$$

27. Единица работы

Если сила F выражена в килограммах, а путь s — в метрах, то работа A выражается в килограмм-сила-метрах (кгс · м). Это работа, которую нужно затратить, что-

бы поднять груз в 1 кгс на высоту 1 м. Единицей работы в системе СИ является 1 джоуль (Дж), равный работе, совершаемой силой в 1 ньютон при перемещении на 1 метр. Между килограмм-сила-метром и джоулем имеется соотношение:

$$1 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 9{,}81 \text{ Дж}.$$

28. Выражение работы, если направление силы не совпадает с направлением пути

Если сила F действует не по направлению пути s, по которому передвигается тело, а образует с ним угол α, то величина работы определяется формулой

$$A = Fs\cos\alpha = F_s s.$$

(Величина работы равна произведению проекции силы F_s на величину пройденного пути).

29. Кинетическая энергия

Кинетической энергией движущегося тела называется произведение половины массы тела на квадрат его скорости:

$$W = \frac{mv^2}{2}.$$

Приращение кинетической энергии движущегося тела равно работе действующих на это тело сил:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

30. Мощность

Способность двигателя произвести определенную работу в некоторый промежуток времени называется его мощностью. Мощность измеряется отношением выпол-

ненной работы к соответствующему промежутку времени (работа в единицу времени):

$$P = \frac{A}{t}.$$

31. Единица мощности

Единицей мощности в системе СИ является 1 ватт (Вт) (1 Вт — это такая мощность, когда за 1с производится работа в 1 Дж).

Несистемные единицы мощности:

$$1 \text{ киловатт (кВт)} = 1000 \text{ Вт},$$

$$1 \text{ лошадиная сила (л.с.)} = \frac{75 \text{ кгс·м}}{1\text{с}} = 736 \text{ Вт}.$$

32. Коэффициент полезного действия

В каждом двигателе значительная часть мощности уходит не на полезную работу, а на преодоление внутреннего сопротивления двигателя (трение и т. п.). Таким образом, полезная мощность двигателя всегда меньше его полной мощности. *Коэффициентом полезного действия* η называется отношение полезной мощности P' к общей величине затраченной мощности P:

$$\eta = \frac{P'}{P}.$$

33. Момент инерции

При изучении вращения тела вокруг некоторой оси большое значение имеет *момент инерции* этого тела. Моментом инерции тела относительно данной оси ab называется сумма произведений масс m_1, m_2, m_3,... всех

частиц этого тела на квадраты расстояний r_1, r_2, r_3,... этих частиц до оси ab:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots$$

В этой формуле слагаемых бесконечное множество. Такая сумма вычисляется методами высшей математики (интегральное исчисление).

Единицей измерения момента инерции является килограмм-метр в квадрате (кг · м²).

34. Моменты инерции простейших тел

Момент инерции *прямоугольника* (рис. 54, *а*) относительно оси симметрии AB

$$I = \frac{mb^2}{3},$$

где b — половина длины оси CD, m — масса тела.

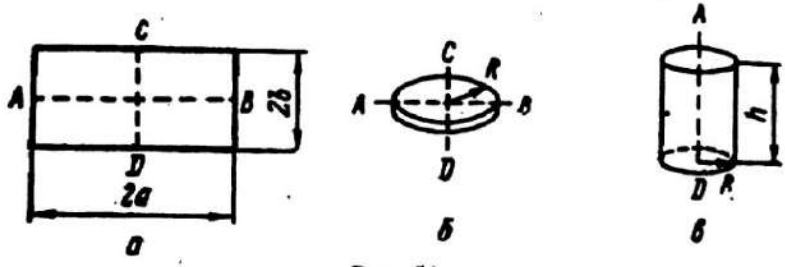


Рис. 54

Момент инерции *круга* (рис. 54, *б*) с радиусом R относительно его диаметра AB:

$$I = \frac{mR^2}{4},$$

а относительно оси CD, перпендикулярной к плоскости круга и проходящей через его центр,

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

Момент инерции *цилиндра* (рис. 54, *в*) относительно его оси

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

35. Кинетическая энергия при вращении

Кинетическая энергия вращающегося тела вычисляется по формуле

$$W = \frac{I\omega^2}{2},$$

где ω — угловая скорость вращения, I — момент инерции тела относительно оси вращения.

36. Законы трения

1. Трение, возникающее при скольжении одного тела по другому (*трение скольжения, или трение I рода*), значительно больше трения при перекатывании одного тела по другому (*трение качения, или трение II рода*).

2. Сила трения I рода F зависит не от величины трущихся поверхностей, а от качества поверхностей тру-

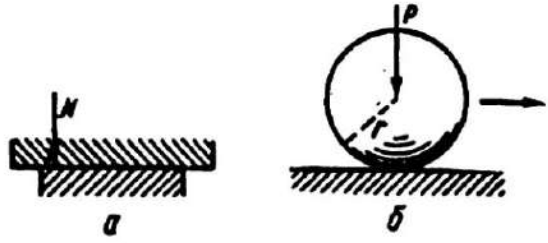


Рис. 55

щихся тел и от силы, сжимающей трущиеся поверхности (*нормальной реакции*) и направленной перпендикулярно к ним (см. рис. 55, *а*):

$$F = kN,$$

где F — сила трения, N — величина нормальной реакции и k — *коэффициент трения при скольжении (коэффициент трения I рода).*

3. Сила трения II рода F прямо пропорциональна нормальному давлению P и обратно пропорциональна радиусу r перекатываемого круглого тела (рис. 55, *б*), если движущая сила горизонтально направлена и приложена к центру круглого тела:

$$F = \frac{fP}{r},$$

где F — сила трения, P — нормальное давление, r — радиус перекатываемого тела, а f — *коэффициент трения при качении (коэффициент трения II рода).*

4. Для трения I рода в момент начала движения величина силы трения (*трение покоя*) несколько больше силы трения при уже установившемся движении.

37. Коэффициенты трения некоторых тел

Коэффициенты трения при скольжении

Трущиеся вещества	
В движении	
Чугун по чугуну	0,21
по железу	0,18
Железо по железу	0,44
Дуб по дубу параллельно волокнам	0,34
перпендикулярно волокнам	0,48
Ремень по дубовому шкиву	0,27
по чугунному шкиву	0,30
Сталь по льду	0,014
В покое	
Чугун по железу	0,28—0,38
Дуб по дубу параллельно волокнам	0,54
перпендикулярно волокнам	0,62
Ремень по дубовому шкиву	0,47
Сталь по льду	0,027

Коэффициенты трения при качении

Трущиеся вещества	f, м
Чугун по дереву	0,00046
Железо по железу	0,0005
Резиновая шина по шоссе	0,0024

IV. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

38. Гравитационная постоянная

Закон всемирного тяготения заключается в том, что все материальные тела испытывают взаимное притяжение друг к другу. Для тел, размеры которых невелики по сравнению с расстоянием между ними, сила притяжения (F) прямо пропорциональна произведению масс (m_1m_2) тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния (r) между ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Коэффициент пропорциональности γ называется *гравитационной постоянной,* размер которой зависит от выбора единиц измерения: силы, массы и расстояния. В системе СИ соответствующие величины измеряются в ньютонах (Н), килограммах (кг) и метрах (м).

Значение гравитационной постоянной равно:

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

39. Притяжение тел Землей

Для расчета притяжения тел к Земле, находящихся на ее поверхности, в уравнение закона всемирного тяго-

тения нужно подставить массу Земли $M=5{,}98\cdot10^{24}$ кг и ее радиус $R=6{,}37\cdot10^{6}$ м:

$$F=m\gamma\frac{M}{R^2}.$$

На поверхности Земли между силой притяжения (F) и массой тела (m) существует связь

$$F=mg.$$

Таким образом, ускорение свободного падения можно выразить через массу Земли (M) и ее радиус (R):

$$g=\gamma\frac{M}{R^2}.$$

При этом нужно учитывать, что расстояние R зависит от широты. Кроме того, центробежная сила, обусловленная вращением Земли, уменьшает силу притяжения.

При удалении от поверхности Земли ускорение свободного падения уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли:

$$g_h=g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2,$$

где h — высота над поверхностью Земли, g — ускорение на Земле, g_h — ускорение на высоте, R — радиус Земли.

ФИЗИКА*

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Масса и вес

О *массе* тела m как мере количества заключающегося в нем вещества судят по весу: для данного места Земли масса пропорциональна весу. За единицу массы принимают 1 килограмм (см. определение стр. 5).

Вес тела P — сила, с которой Земля притягивает к себе тело; эту силу определяют с помощью пружинных весов. Масса и вес связаны соотношением

$$P = mg.$$

2. Плотность

Плотность вещества (D) определяется массой этого вещества (m), находящегося в единице объема (V), т. е.

$$D = \frac{m}{V}.$$

В быту и технике находит широкое применение сравнение плотности вещества с плотностью воды, т. е. применяется такая единица плотности, для которой плотность воды равна 1. Эта единица имеет три эквивалентных наименования: тонна на кубический метр (т/м^3); килограмм на кубический дециметр (кг/дм^3); грамм на кубический сантиметр (г/см^3). Следует иметь в виду, что плотность воды (как и всех веществ) зависит от температуры; вода имеет наибольшую плотность при 4 °С.

В системе СИ плотность измеряется в килограммах на кубический метр (кг/м^3). Плотность воды при 4 °С в системе СИ равна 1000 кг/м^3.

При подстановке в физические уравнения плотность веществ нужно выразить в кг/м^3.

---

* Вопросы механики выделены в специальный раздел «Справочника» (стр. 88—110).

3. Плотность употребительных веществ

А. Плотность твердых тел

Вещество	Плотность, кг/м³	Вещество	Плотность, кг/м³
Алмаз	3520	Масло коровье	910
Алюминий	2700	Медь литая	8800
Асбест	2300	Медь вальцованная или кованая	8950
Асфальт	1200	Медь электролитическая	8920
Баббит белый	7100	Мел	2400
Береза сухая	720	Мрамор	2700
Бетон	2250	Нейзильбер	8550
Бронза (медь+олово, от 22 до 4% олова)	8800	Никелин	8770
Бук сухой	730	Никель	8800
Бумага писчая	920	Олово литое	7230
Глина сухая	1380	Парафин	900
Гранит	2650	Песок сухой	1500
Графит	2100	Платина	21500
Дуб сухой	800	Пробка	240
Ель сухая	600	Свинец	11400
Железо (химически чистое)	7860	Сера	2000
Золото	19300	Серебро	10500
Каменный уголь (в кусках)	1350	Сосна сухая	480
Кирпич	1500	Сталь литая	7860
Латунь литая	8450	Стекло оконное	2550
Латунь кованая	8550	Строительные камни	2500
Лед	900	Фарфор	2320
Липа сухая	450	Цемент	1380
		Цинк	7050
		Чугун	7000
		Эбонит	1500

Б. Плотность жидкостей

Вещество	При температуре, °С	Плотность, кг/м³
Азотная кислота (91% HNO_3)	15	1500
Бензин	15	680—700
Вода чистая	4	1000
Вода морская	15	1020—1030
Древесный спирт	0	800
Керосин	15	790—820
Масло минеральное (смазочное)	20	900—930
Молоко коровье цельное	15	1032
Молоко коровье снятое	15	1028
Нефть	19	760
Раствор медного купороса с 15% соли	15	1100
Ртуть	0	13590
Серная кислота 30%-ная	15	1200
Скипидар	15	855
Соляная кислота 10%-ная	15	1050
Спирт этиловый безводный	18	791
Эфир этиловый	20	714

В. Плотность газов

Вещество	Плотность при 0 °С и нормальном давлении, кг/м³
Азот	1,251
Воздух	1,293
Водород	0,08988
Гелий	0,1785
Кислород	1,429
Углекислота (угольный ангидрид)	1,977

II. ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ

4. Давление

Отношение $\frac{F}{S}$, где F — нормальная к поверхности S и равномерно по ней распределенная давящая сила, на-

зывается *давлением* (p); численное отношение $\frac{F}{S}$ соответствует силе, приходящейся на единицу поверхности:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Если известно давление p, то сила F, давящая на поверхность площадью S, вычисляется по формуле

$$F = pS.$$

5. Единицы давления

В системе СИ единицей давления является паскаль (Па):

$$1\text{Па} = \frac{1\text{Н}}{1\text{м}^2}.$$

До введения системы СИ широко применялась техническая атмосфера (ат) или килограмм-сила на квадратный сантиметр (кгс/см^2):

$$1\text{ат} = 1\text{кгс/см}^2 = 9810\text{ Па}.$$

Другими единицами давления являются:

1 миллиметр ртутного столба (мм рт. ст.) = 133 Па (давление, которое создает столб ртути высотой в 1 мм);

1 миллиметр водяного столба (мм вод. ст.) = 9,81 Па (давление, которое создает столб воды высотой в 1 мм);

1 нормальная атмосфера (атм) = $1{,}013 \cdot 10^5$ Па (давление столба ртути высотой 760 мм).

6. Закон Паскаля

«Если оказывать извне давление на жидкость или газ, то это давление передается во все стороны одинаково», т. е. каждый участок площадки, как бы он ни был расположен внутри жидкости или газа, будет испытывать с обеих сторон равные давления p (рис. 56).

7. Давление жидкости на дно сосуда

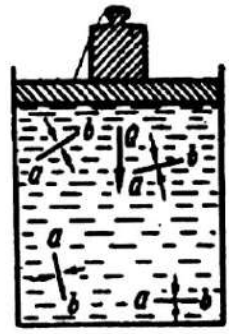


Рис. 56

На основании закона Паскаля жидкость благодаря своему весу будет давить как на дно сосуда, в который налита, так и на его боковые стенки перпендикулярно к ним. Давление на дно сосуда зависит от глубины h дна (глубина отсчитывается по вертикали от уровня жидкости) и от плотности D жидкости и выражается формулой

$$p = hDg,$$

где g — ускорение силы тяжести, D — плотность.

Если площадь дна равна S кв. единицам, то давящая на него сила F выразится так:

$$F = pS = hSDg.$$

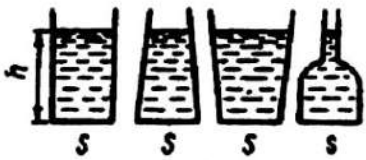


Рис. 57

Эта сила зависит только от высоты уровня жидкости, площади дна и плотности жидкости и не зависит от формы сосуда. Таким образом, давление одной и той же жидкости на дно сосудов, изображенных на рис. 57, одинаково.

8. Давление жидкости на боковую стенку

Закон Паскаля применяется и для *давления на площадку боковой стенки* сосуда (рис. 58):

$$F = h_1SDg,$$

где h_1 — средняя глубина площадки.

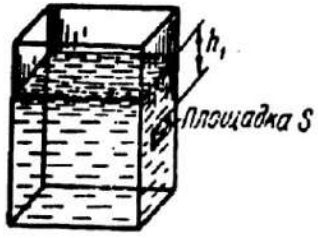


Рис. 58

9. Законы сообщающихся сосудов

В *сообщающихся сосудах* независимо от их формы однородная жидкость устанавливается на одном уровне *mn* (рис. 59, *а*), высоты же h_1 и h_2 уровней разнородных жидкостей (считая от общего уровня их касания) (рис. 59, *б*) обратно пропорциональны их плотности D_1 и D_2, т. е.

$$h_1 : h_2 = D_2 : D_1.$$

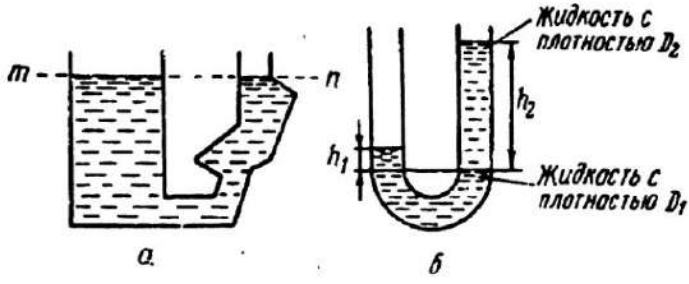


Рис. 59

10. Закон Архимеда

Так как любая площадка внутри жидкости испытывает давление по нормали (перпендикуляру) к ней, то и тело, погруженное в жидкость, будет также испытывать со стороны прилегающей к нему жидкости нормальное давление со всех сторон: с боков и сверху вниз, и снизу вверх (рис. 60). Но давление $p_1 = h_1 Dg$ снизу больше давления $p_2 = h_2 Dg$ сверху; поэтому всякое погруженное в жидкость тело будет ею выталкиваться снизу вверх с некоторой силой F; эта сила равна весу вытесненной телом жидкости (*закон Архимеда*):

$$F = VDg,$$

где V — объем тела, D — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения.

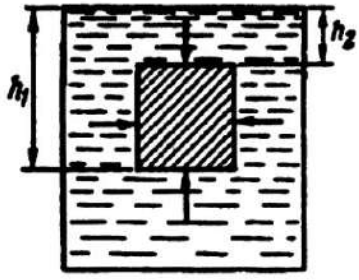


Рис. 60

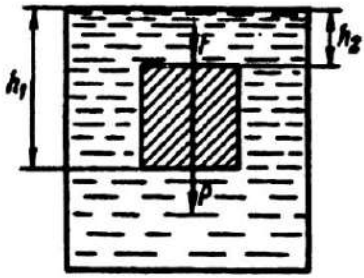


Рис. 61

11. Плавание тел

На тело в жидкости будут действовать две силы (рис. 61): сила веса тела P, направленная вертикально вниз, и сила давления F жидкости, направленная вертикально вверх; равнодействующая R этих сил равна их разности и направлена в сторону большей. Поэтому находящееся в жидкости тело может тонуть, если $P>F$; всплывать на поверхность, если $P<F$, и быть в равновесии, если $P=F$. Плавающее тело погружено некоторой своей частью в жидкость; погруженная часть вытесняет по весу столько жидкости, сколько весит все тело.

12. Закон Паскаля для газов

Так как закон Паскаля применим и к газам, то к газам применимы и все указанные выше следствия этого закона, в частности закон Архимеда.

13. Давление атмосферы

Окружающая Землю воздушная оболочка (атмосфера) благодаря своему весу давит на тело по закону Паскаля со всех сторон одинаково. Величина давления атмосферы с высотой уменьшается. Давление атмосферы

на уровне моря называется *нормальным*, если оно уравновешивает вертикальный столб ртути высотой в 76 см.

Если плотность ртути $D=13600$ кг/м^3, то величина нормального давления

$$p=0{,}76\ \text{м}\cdot 13\,600\ \text{кг/м}^3\cdot 9{,}81\ \text{м/с}^2=1{,}013\cdot 10^5\ \text{Па}.$$

Полученную величину называют *нормальной атмосферой*.

14. Барометр

Атмосферное давление измеряется *барометром*. Простейшая схема ртутного барометра изображена на рис. 62. Ртутный барометр основан на принципе сообщающихся сосудов: в одном (в пробирке) — ртуть, в другом (окружающее пространство) — воздух.

Рис. 62

15. Закон Бойля—Мариотта

Газы подчиняются *закону Бойля—Мариотта*: «объем, занимаемый одной и той же массой газа при неизменной температуре, обратно пропорционален давлению, под которым газ находится»:

$$V_1 : V_2 = p_2 : p_1,$$

или: «для данного количества газа при одной и той же температуре произведения объемов газа на соответствующие им давления будут равны между собой, т. е. эти произведения дадут постоянную (одну и ту же) величину»:

$$V_1 p_1 = V_2 p_2 = \text{const},$$

где V_1 и V_2 — объемы газа, а p_1 и p_2 — соответствующие им давления. Так как объемы V_1 и V_2 одной и той же

массы газа при неизменной температуре обратно пропорциональны плотности газа D_1 и D_2, т. е. $V_1 : V_2 = D_2 : D_1$, то

$$p_2 : p_1 = D_2 : D_1,$$

т. е. плотности одного и того же газа при одной и той же температуре, но при различных давлениях пропорциональны давлениям.

III. ТЕПЛОТА

16. Измерение температуры

Температура измеряется косвенным путем в ртутном и спиртовом термометрах по изменению объема жидкости в зависимости от температуры; в газовом термометре — по изменению давления газа в зависимости от температуры. Для создания температурной шкалы необходимы по крайней мере две опорные температуры. Такими опорными температурами обычно являются температуры плавления или кипения вещества.

При построении *шкалы Цельсия* температура *плавления льда* при нормальном давлении принимается за 0 °С; температура *кипения воды* при нормальном давлении — за 100 °С. В природе существует самая низкая температура — это *абсолютный нуль температуры*. По шкале Цельсия его значение равно −273,15 °С.

В системе СИ температура измеряется в *кельвинах* (см. стр. 6). За 0 К принимается абсолютный нуль температуры, а в качестве *опорной температуры* используется температура *тройной точки воды*, которой придано численное значение 273,16 °К.

Соотношение между температурой по Цельсию и температурой по Кельвину следующее:

$$t\,°\text{C} = T\text{K} - 273{,}15; \qquad (1)$$

$$T\text{K} = t\,°\text{C} + 273{,}15. \qquad (2)$$

Приведем наиболее характерные температуры по шкале Кельвина и Цельсия.

Абсолютный нуль температуры	0K	—273,15 °C
Температура плавления льда при нормальном давлении	27 3,15K	0 °C
Температура тройной точки воды (когда три фазы воды—жидкая, твердая и газообразная — находятся в равновесии)	273,16K	0,01 °C
Температура кипения воды при нормальном давлении	373,15K	100 °C

Нужно иметь в виду, что градуировка температурной шкалы на градусы производится при помощи определенной *термодинамической процедуры*. Если разбить шкалу на градусы, пропорциональные просто приращению объема (либо давления), то такая температурная шкала будет зависеть от свойств рабочего вещества.

Принципиально можно создать температурную шкалу, не зависящую от свойств рабочего вещества, например, использовав *закон термодинамики*, заключающийся в том, что коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины определяется только абсолютной температурой нагревателя T_1 и абсолютной температурой охладителя T_2:

$$\text{к. п. д.} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

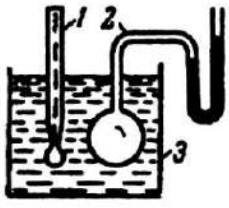


Рис. 63

Построенная таким образом шкала называется *термодинамической температурной шкалой*. Наиболее близко к температурной шкале приближается шкала *газового термометра*, наполненного водородом при низком давлении, у которого шкала разбивается на градусы пропорционально приращению давления. На рис. 63 приведена схема градуирования жид-

костного термометра *1* по газовому термометру *2*, которые находятся в термостате *3*.

17. Линейное расширение при нагревании

Коэффициент линейного расширения α какого-либо вещества определяет, на какую долю увеличивается единица длины этого вещества, если его нагревать на один градус С (или 1К). Поэтому полное удлинение k стержня, нагретого на $t°$, выразится формулой $k=\alpha l_0 t$, а вся длина стержня

$$l=l_0(1+\alpha t),$$

где l_0 — начальная длина стержня, α — температурный коэффициент линейного расширения, измеряемый в $К^{-1}$ (кельвин в минус первой степени).

18. Объемное расширение при нагревании

Прирост единицы объема вещества, когда оно нагревается на один градус С (или 1К), называется *объемным* (или *кубическим*) *коэффициентом расширения* (β). Формула, выражающая объем V какого-либо тела, нагретого на $t°$, имеет вид

$$V = V_0(1 + \beta t),$$

где V_0 — начальный объем тела. Коэффициент β объемного расширения вещества в три раза больше коэффициента линейного расширения:

$$\beta = 3\alpha.$$

При определении расширения жидкостей и газов принимают во внимание только объемный коэффициент.

19. Таблицы коэффициентов расширения

1. Коэффициенты расширения твердых веществ

(в основном между температурами 0 и 100°)

Вещество	Коэффициент линейного расширения (α), K^{-1}	Коэффициент объемного расширения (β), K^{-1}
Алюминий	0,0000238	0,0000714
Бронза	0,0000175	0,0000525
Железо литое	0,0000120	0,0000360
Золото	0,0000142	0,0000426
Инвар*	0,0000015	0,0000045
Латунь	0,0000184	0,0000552
Медь	0,0000165	0,0000495
Никель	0,0000128	0,0000384
Олово	0,0000267	0,0000801
Платина	0,0000090	0,0000270
Свинец	0,0000292	0,0000876
Серебро	0,0000197	0,0000591
Сталь	0,000011	0,000033
Стекло различных сортов	от 0,000004 до 0,00001	от 0,000012 до 0,00003
Фарфор	0,000003	0,000009
Цемент	0,000014	0,000042
Цинк	0,0000286	0,0000858
Чугун	0,0000104	0,0000312

* Никелевая сталь, содержащая 36,1% никеля, 0,39% углерода, 0,39% марганца. Замечательна среди металлов малым температурным коэффициентом расширения.

2. Коэффициенты расширения жидкостей

(в основном при комнатной температуре)

Вещество	Коэффициент объемного расширения (β), K^{-1}
Керосин	0,0010
Ртуть	0,000182
Серная кислота	0,00056
Спирт	0,00110
Эфир	0,00166

20. Закон Гей-Люссака

Все газы имеют при постоянном давлении один и тот же коэффициент расширения: при нагревании на 1 °С газы расширяются при неизменном давлении примерно на 1/273 часть того объема, который они занимали при 0 °С (*закон Гей-Люссака*):

$$V_1 = V_0\left(1 + \frac{1}{273}t_1\right),$$

где V_1 — объем газа при температуре t_1, до которой нагрет газ; V_0 — объем при 0 °С.

21. Зависимость давления от температуры

Если газ нагревать в закрытом сосуде, т. е. при неизменном объеме, то давление газа увеличивается примерно на 1/273 долю того давления, которое имел бы газ при 0 °С. Давление газа p_1 при температуре t_1 выразится формулой

$$p_1 = p_0\left(1 + \frac{1}{273}t_1\right),$$

где p_0 — давление данной массы газа при 0 °С.

22. Закон Бойля—Мариотта—Гей-Люссака

Если газ, занимавший при 0° объем V_0 под давлением p_0, будет нагрет до t_1 °С и будет занимать некоторый объем V_1 под давлением p_1, то имеет место *закон Бойля—Мариотта—Гей-Люссака:*

$$\frac{V_1 p_1}{1 + \beta t_1} = V_0 p_0 = \text{const}, \qquad (3)$$

т. е. «для данной массы газа произведение его объема на давление, деленное на выражение $1 + \beta t_1$ (*бином расширения*), есть величина постоянная».

23. Уравнение Клапейрона

Если температуру t по шкале Цельсия в формуле (3) заменить температурой T по абсолютной шкале (формула (2)), то формула (3) примет вид

$$\frac{V_1 p_1}{T} = \frac{V_0 p_0}{T_0} = \text{const}, \qquad (4)$$

где $T_0 = 273$ К (точнее, 273,15°). Это — *уравнение Клапейрона*: «Для данной массы газа произведение его объема на давление, деленное на абсолютную температуру газа, есть величина постоянная».

24. Универсальная газовая постоянная

Объем килограмм-моля $\left(V_0'\right)$ любого газа при *нормальных* условиях занимает 22,4 м³. Следовательно, для 1 кмоля любого газа постоянная в уравнении Клапейрона (4) имеет одинаковое значение. Эта постоянная носит название *универсальной газовой постоянной* R:

$$R = \frac{V_0' p_0}{T_0} = \frac{V' p}{T},$$

где V' — объем 1 кмоля газа, $R = 8310 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{кмоль}}$ — универсальная газовая постоянная.

Для удобства уравнение Клапейрона записывают в такой форме:

$$V' p = RT. \qquad (5)$$

25. Уравнение Менделеева — Клапейрона

Если имеется не один кмоль газа, а n кмолей, то уравнение Клапейрона (5) можно представить в виде

$$Vp = nRT, \qquad (6)$$

где V — объем n кмолей газа.

Если масса газа m (кг), его молекулярная масса $\mu \left(\frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}\right)$, то число кмолей $n = \frac{m}{\mu}$ и уравнение (6) можно представить в виде

$$Vp = \frac{m}{\mu} RT.$$

В таком виде оно называется *уравнением Менделеева—Клапейрона*.

26. Единицы теплоты

Теплота представляет собой *энергию хаотического (беспорядочного) движения атомов* и *молекул*. В системе СИ всякая энергия измеряется в единицах работы — джоулях. Следовательно, единицей количества теплоты в системе СИ является 1 Дж. Количество теплоты в 1 Дж *эквивалентно* механической работе в 1 Дж.

Такое определение основано на возможности *превращения* одного вида энергии в другой, в частности, на том факте, что механическая энергия может превращаться в тепловую и обратно. При этом всегда имеет место *закон сохранения энергии*:

$$Q = A,$$

где Q — количество теплоты, A — механическая работа.

В качестве несистемных единиц количества теплоты могут применяться килоджоуль (кДж), мегаджоуль (МДж):

1 кДж = 1000 Дж; 1 МДж = 1 000 000 Дж.

До введения системы СИ в качестве единицы теплоты широко применялись калория (кал) и килокалория (ккал):

1 кал = 4,19 Дж; 1 ккал = 4190 Дж.

27. Теплоемкость

Теплоемкость (C) данного тела измеряется количеством теплоты, необходимым для нагревания этого тела на 1 К (или на 1 °С).

Теплоемкость определяется формулой

$$C = \frac{Q}{T_2 - T_1},$$

где Q — количество теплоты, израсходованное на нагревание, $(T_2 - T_1)$ — разность температур в конце и начале нагревания.

В системе СИ теплоемкость измеряется в джоулях на кельвин (Дж/К).

28. Удельная теплоемкость

Удельной теплоемкостью (c) вещества называется количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг вещества на 1К (или 1 °С).

Удельная теплоемкость определяется по формуле

$$c = \frac{Q}{m(T_2 - T_1)},$$

где Q — количество теплоты, израсходованное на нагревание, m — масса вещества, $(T_2 - T_1)$ — разность температур в конце (T_2) и начале (T_1) нагревания.

В системе СИ удельная теплоемкость измеряется в джоулях на килограмм-кельвин $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\right)$.

До введения системы СИ широко применялись единицы теплоемкости, основанные на калории:

калория на грамм-градус (кал/г·град),

килокалория на килограмм-градус (ккал/кг·град);

$$1\ \frac{\text{кал}}{\text{г}\cdot\text{град}} = 1\ \frac{\text{ккал}}{\text{кг}\cdot\text{град}} = 4190\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}.$$

29. Таблица удельных теплоемкостей веществ*

Вещество	Удельная теплоемкость, $\frac{Дж}{кг \cdot К}$	Вещество	Удельная теплоемкость, $\frac{Дж}{кг \cdot К}$
Алюминий	880	Медь	380
Вода	4190	Олово	230
Воздух при постоянном давлении	1000	Парафин	310
		Платина	135
Воздух при постоянном объеме	720	Пробка	1100—2000
		Ртуть	139
Графит	800	Свинец	130
Железо	460	Серебро	210
Золото	130	Спирт	2400
Керосин	2140	Сталь	460
Кирпич (между 0 и 100°)	800—1000	Стекло	800
		Цинк (около 35°)	370
Латунь	390	Чугун (от 0 до 100°)	550
Лед (от 40 до 0°)	1800		

* Удельные теплоемкости изменяются (незначительно) при изменении температуры тела. В таблице, кроме случаев, где температура указана в скобках, удельная теплоемкость дается при 18 °С.

30. Теплота, необходимая для нагревания тела

Количество теплоты, необходимое для нагревания массы m вещества с удельной теплоемкостью c от температуры T_1 до T_2, выражается формулой

$$Q = mc\,(T_2 - T_1).$$

31. Температура плавления и отвердевания

Для кристаллических веществ (к ним относятся и металлы) температура плавления (*точка плавления*) и температура отвердевания (*точка отвердевания*) совпадают; для некристаллических веществ, например смолы, стекла

и т. п., постоянной точки плавления нет. В таблице указаны температуры плавления (и отвердевания) наиболее употребительных кристаллических веществ:

Вещество	Температура плавления, °С	Вещество	Температура плавления, °С
Алюминий	658	Раствор поваренной соли (насыщенный)	—18
Железо	1520	Ртуть	—38,9
Золото	1064	Свинец	327
Иридий	2350	Серебро	960
Латунь	около 1000	Спирт	—114
Медь	1083	Сталь	1300—1400
Олово	232	Цинк	419
Парафин	около 54	Чугун	1100—1200
Платина	1770	Эфир	—123
Припой мягкий	135—200		

32. Удельная теплота плавления

Количество тепла, необходимое для того, чтобы 1 кг какого-нибудь твердого вещества, нагретого до температуры плавления, превратить в жидкое состояние при той же температуре, называется *удельной теплотой плавления* этого вещества. Эта теплота не повышает температуры вещества, а тратится на то, чтобы превратить его из твердого состояния в жидкое. Удельная теплота плавления (λ) определяется формулой

$$\lambda = \frac{Q}{m},$$

где Q — теплота плавления, m — масса вещества.

В системе СИ удельная теплота плавления измеряется в джоулях на килограмм (Дж/кг).

До введения системы СИ удельная теплота плавления измерялась в калориях на грамм (кал/г) или килокалориях на килограмм (ккал/кг):

1 кал/г = 1 ккал/кг = 4190 Дж/кг.

33. Таблица удельной теплоты плавления

Веществ	Удельная теплота плавления, Дж/кг	Веществ	Удельная теплота плавления, Дж/кг
Алюминий	386 000	Платина	114 000
Железо	271 000	Ртуть	11 700
Золото	166 000	Свинец	25 000
Лед	334 000	Серебро	82 000
Медь	175 000	Цинк	118 000
Олово	60 000	Чугун белый	140 000
Парафин	147 000	Чугун серый	100 000

34. Теплота, необходимая для плавления тела

Количество тепла Q, необходимое для того, чтобы расплавить массу вещества m с удельной теплоемкостью c, начальной температурой t_1 и температурой плавления t_2, выражается формулой

$$Q = mc\,(t_2 - t_1) + \lambda m,$$

где λ — теплота плавления вещества.

35. Затвердевание вещества

При понижении температуры (остывании) происходит затвердевание вещества — процесс, обратный плавлению. При затвердевании вещества выделяется такое же количество теплоты, которое пошло на его плавление (здесь проявляется закон сохранения энергии).

36. Особенность воды при охлаждении

При затвердевании большинства веществ объем их уменьшается; когда же замерзает вода, то объем ее, наоборот, увеличивается (так называемая *«аномалия воды»*); то же происходит с чугуном и некоторыми другими веществами.

37. Испарение и насыщенные пары

При всякой температуре между точками кипения и замерзания жидкость *испаряется:* отдельные частицы жидкости отрываются от ее поверхности и вылетают в окружающую среду. Если жидкость заключена в закрытый со всех сторон сосуд, то может наступить момент, когда испарение как бы прекратится. В таком случае пространство над жидкостью называется пространством, *насыщенным парами*, а сами пары — *насыщенными*, или *насыщающими пространство*; пока этого не произойдет, пары называются *ненасыщенными*, или *ненасыщающими пространство*.

38. Давление паров

При одной и той же температуре давление насыщенных паров больше, чем ненасыщенных. Давление насыщенных паров различных жидкостей при одной и той же температуре различно. Наибольшее давление будут иметь насыщенные пары легко испаряющихся, или летучих, жидкостей (эфир, спирт и т. п.). Давление насыщенных паров любой жидкости будет увеличиваться с увеличением температуры паров.

39. Таблица давления насыщенных паров

Температура, °С	Давление насыщенных паров в паскалях (Па)			
	эфир	спирт	вода	ртуть
—20	8800	440	106	—
0	24600	1600	610	0,05
20	58500	5850	2330	0,24
40	120000	17800	7320	1,06
60	235000	46500	19800	3,30
80	395000	108500	47200	12,0
100	650000	225000	101300	37,1

40. Таблица давления и плотности водяного пара

Плотность насыщенных паров при данной температуре наибольшая и растет с увеличением температуры.

Температура (T), °С	Давление (p), Па	Плотность (d), кг/м³	Температура (T), °С	Давление (p), Па	Плотность (d), кг/м³
—2	516	0,00413	15	1700	0,0128
—1	560	0,00447	20	2330	0,0173
0	610	0,00484	25	3170	0,0230
1	660	0,00522	30	4240	0,0303
2	705	0,00560	35	5610	0,0396
3	760	0,00598	40	7350	0,0512
4	810	0,00640	50	12300	0,0830
5	870	0,00684	60	19800	0,1300
6	930	0,00730	70	31000	0,1980
7	1000	0,00780	80	43900	0,2930
8	1060	0,00830	90	83000	0,4240
9	1130	0,00880	100	101300	0,5980
10	1220	0,00940			

41. Зависимость температуры кипения от давления

Температура кипения жидкости зависит от давления на нее и повышается с увеличением давления. В таблице указаны температуры кипения различных веществ при нормальном атмосферном давлении.

Вещество	Точка кипения, °С	Вещество	Точка кипения, °С
Азот	—195	Ртуть	357
Алюминий	1800	Свинец	1000
Железо	2450	Спирт этиловый (обыкновенный)	78,3
Золото	2600		
Кислород	—183	Цинк	906,0
Медь	2300	Эфир	34,6
Олово	2300		
Парафин	300		

42. Конденсация пара

Если пространство, занятое насыщенными парами, охладить или путем сжатия уменьшить, то часть паров превращается обратно в жидкость. Процесс превращения пара в жидкость называется *конденсацией пара.*

Охлаждая ненасыщенные пары или уменьшая объем, занимаемый ими, можно превратить их в насыщенные. Процесс превращения жидкости в пар идет с поглощением некоторого количества теплоты; наоборот, при конденсации пара теплота выделяется.

43. Зависимость температуры кипения воды от давления

Для кипения воды зависимость температуры от давления выражается следующей таблицей:

Давление, Па	Температура кипения, °С	Давление, Па	Температура кипения, °С
$0{,}98 \cdot 10^5$	99,23	$5 \cdot 10^5$	151
$0{,}99 \cdot 10^5$	99,46	$6 \cdot 10^5$	158
$1 \cdot 10^5$	99,70	$7 \cdot 10^5$	164
$1{,}01 \cdot 10^5$	99,93	$8 \cdot 10^5$	169
$1{,}013 \cdot 10^5$	100,00	$9 \cdot 10^5$	174
$1{,}02 \cdot 10^5$	100,27	$1 \cdot 10^6$	179
$2 \cdot 10^5$	120	$2 \cdot 10^6$	211
$3 \cdot 10^5$	133	$4 \cdot 10^6$	249
$4 \cdot 10^5$	143	10^7	310

44. Удельная теплота парообразования

Количество тепла, которое надо затратить, чтобы 1 кг жидкости превратить в пар той же температуры, что и у жидкости, называется *удельной теплотой парообразования.* Теплота парообразования затрачивается не на поднятие температуры тела, а на превращение его из жидкого состояния в парообразное. Удельная теплота парообразования (r) определяется формулой

$$r = \frac{Q}{m},$$

где Q — теплота парообразования, m — масса вещества.

В системе СИ удельная теплота парообразования измеряется в джоулях на килограмм (Дж/кг).

Удельная теплота парообразования воды при 100 °С равна 2 260 000 Дж/кг, ртути при 357 °С — 296 000 Дж/кг, эфира при 34,6 °С — 352 000 Дж/кг.

45. Теплота, необходимая для парообразования

Количество теплоты, необходимой для того, чтобы превратить в пар массу m воды при начальной температуре T_0, выражается формулой

$$Q = m(T_к - T_0) + rm,$$

где $T_к$ — температура кипения воды при данном давлении, r — удельная теплота парообразования.

46. Удельная теплота сгорания топлива

Количество теплоты, выделяемое при сгорании 1 кг топлива, называется *удельной теплотой сгорания* топлива, или *теплотворной способностью топлива*. Удельная теплота сгорания (q) определяется по формуле

$$q = \frac{Q}{m},$$

где Q — количество тепла, выделившегося при сгорании топлива массой m.

В системе СИ удельная теплота сгорания топлива измеряется в джоулях на килограмм (Дж/кг).

В качестве несистемной единицы может применяться мегаджоуль на килограмм (МДж/кг):

$$1 \text{ МДж/кг} = 10^6 \text{ Дж/кг}.$$

До введения системы СИ удельная теплота измерялась в килокалориях на килограмм (ккал/кг):

$$1 \text{ ккал/кг} = 4190 \text{ Дж/кг}.$$

47. Таблица удельной теплоты сгорания различного топлива

Топливо	Удельная теплота сгорания, Дж/кг
Дрова	от 8 000 000 до 11 000 000
Каменный уголь	от 30 000 000 до 36 000 000
Торф	от 10 000 000 до 15 000 000
Бензин	от 44 000 000 до 47 000 000
Газ природный	от 33 000 000 до 36 000 000

48. Теплота, выделившаяся при сгорании топлива

$$Q = qm,$$

где Q — количество теплоты, q — удельная теплота сгорания, m — масса сгоревшего топлива.

49. Теплопроводность

Если теплота постепенно распространяется по телу от мест более нагретых к местам менее нагретым, то такое явление называется *теплопроводностью*. Количество протекшего через стенку тепла при установившемся тепловом потоке определяется формулой

$$Q = kS\,\frac{T_1 - T_2}{l}\,t,$$

где S — поверхность стенки, м², T_1 и T_2 — установившиеся температуры той и другой поверхности стенки, l — толщина стенки, м, t — количество секунд, в течение которых перемещалось тепло, k — *коэффициент теплопроводности* материала стенки.

50. Коэффициент теплопроводности

Коэффициент теплопроводности (k) численно равен количеству теплоты в джоулях, протекаемому за 1 с через 1 м² стенки из данного материала толщиной в 1 м, если разность температур обеих поверхностей стенки равна 1 К. Его размерность Вт/(м · К).

51. Таблица коэффициентов теплопроводности

Коэффициенты теплопроводности выражены в единицах системы СИ — ватт на метр-кельвин $\left(\frac{Вт}{м \cdot К}\right)$.

Металлы			
Алюминий	204	Никель	58
Железо	78	Олово	64
Латунь	85	Свинец	35
Медь	390	Серебро	420
Строительные материалы			
Бетон	8—1,4	Дерево (параллельно к волокнам)	0,29—0,41
Гранит	3,1—4,3	Кирпичная кладка	0,7—0,9
Дерево (перпендикулярно к волокнам)	0,14—0,20		
Твердые тела			
Лед	2,1	Фосфор	1,05
Стекло	0,6—0,9		
Термоизоляционные материалы			
Асбест	0,21	Плиты из пробки	0,05—0,09
Вата стеклянная	0,05—0,12	войлока, торфа	0,05
Вата шлаковая	0,09	Шелк	0,04
Опилки	0,07	Шерсть	0,03—0,05

IV. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

52. Электрический заряд и электрический ток

Атомы веществ имеют электрическое строение: состоят из положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов. Одноименные заряды отталкиваются друг от друга, разноименные притягиваются. В нормальном состоянии число положительных и число отрицательных зарядов равно между собой и в целом тело электрически нейтрально. Но так как электроны не жестко привязаны к атому (могут быть удалены от атома), тела обладают свойством электризации. Если у одного тела имеется избыток электронов, то говорят, что оно заряжено отрицательным электрическим зарядом; если у другого тела недостаток электронов, то оно заряжено положительным электрическим зарядом. Такое разделение зарядов производится трением и рядом других причин. Величина электрического заряда, или количества электричества, обозначается буквой q.

Перемещение электрических зарядов называется *электрическим током*. Направление электрического тока ориентировано в сторону движения положительных электрических зарядов, или в сторону, обратную движению отрицательных зарядов.

Величина электрического тока, или сила тока (I), в проводнике определяется количеством электричества, прошедшего через поперечное сечение проводника за единицу времени.

Сила тока (I), количество электричества (q) и время (t) связаны соотношением

$$I = \frac{q}{t},$$

или

$$q = It.$$

53. Единицы силы электрического тока и количества электричества

Основной электрической единицей системы СИ является сила электрического тока — 1 ампер (А) (см. определение ампера на стр. 5). Единица количества электричества — кулон (Кл) — является производной и определяется из уравнения

$$q = It,$$

1 кулон = 1 ампер · 1 секунда (Кл = А·с).

54. Заряд электрона

Электроны и ядра атомов являются носителями электрических зарядов. Самая минимальная порция электрического заряда — это заряд электрона, абсолютная величина которого равна

$$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Электрон несет отрицательный электрический заряд, ядро — положительный заряд, кратный величине e.

Примеры:

заряд электрона $= -e$
заряд ядра водорода $= +e$
заряд ядра гелия $= +2e$
заряд ядра лития $= +3e$
. . . . . .
заряд ядра урана $= +92e$.

55. Закон Кулона. Электрическая постоянная

Точечные * заряды, находясь в вакууме, взаимодействуют с силой (F), пропорциональной произведению вели-

* Точечными называются заряды, сосредоточенные в объеме, размеры которого намного меньше расстояния между зарядами.

чин этих зарядов (q_1q_2) и обратно пропорциональной квадрату расстояния (r) между ними:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1q_2}{r^2}, \qquad (7)$$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ — коэффициент пропорциональности. Множитель 4π включен по той причине, что изменение силы происходит обратно пропорционально площади сферы радиуса r, т. е. пропорционально $\frac{1}{4\pi r^2}$; ε_0 — *электрическая постоянная*, ее размеры зависят от выбранных единиц измерения длины, силы и количества электричества. В системе СИ эти единицы измеряются в метрах, ньютонах и кулонах и значение электрической постоянной будет

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{фарада}}{\text{метр}}.$$

Примечания: 1. Из уравнения (7) для ε_0 вытекает размерность $\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}$, что эквивалентно Ф/м. Последнее наименование является общепринятым*.

2. Для решения задач с применением закона Кулона полезно запомнить численное значение всего коэффициента пропорциональности в формуле (7):

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2},$$

который выражает тот факт, что два заряда по 1 кулону на расстоянии 1 метра взаимодействовали бы с силой $9 \cdot 10^9$ ньютонов.

56. Электрическое поле

Пространство, где проявляются силы, действующие на электрический заряд, называется *электрическим по-*

* $\frac{\Phi}{\text{м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Кл}}{\text{Дж}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}}{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Кл}}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}$.

лем. Электрическое поле может быть создано как непосредственно электрическими зарядами, так и изменяющимся магнитным полем. С количественной стороны электрическое поле характеризуется *напряжением* (энергетическая характеристика) и *напряженностью* (силовая характеристика).

57. Электрическое напряжение

Напряжение между двумя точками поля измеряется работой, которую совершает поле по перемещению единичного заряда между этими точками. Напряжение (U) определяется соотношением

$$U = \frac{A}{q}, \qquad (8)$$

где A — работа поля, затрачиваемая на перемещение заряда q.

Если известно напряжение между двумя точками поля (например, клеммами источника тока), то работа, совершаемая полем по перемещению заряда q, определяется по формуле

$$A = Uq.$$

Если перемещение электрического заряда q происходит в виде непрерывного тока $q = It$, то работа тока вычисляется по формуле

$$A = UIt.$$

58. Единицы напряжения

В системе СИ единицей напряжения электрического поля является 1 вольт (В), которую можно определить из уравнения (8):

$$U = \frac{A}{q},$$

$$1 \text{ вольт} = \frac{1 \text{ джоуль}}{1 \text{ кулон}} \left(\text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}\right).$$

Однако практически единица напряжения устанавливается на основании уравнения

$$U = \frac{P}{I}, \qquad (9)$$

где $P = A/t$ — мощность электрического тока в цепи, $I = q/t$ — сила электрического тока в цепи:

$$1 \text{ вольт} = \frac{1 \text{ ватт}}{1 \text{ ампер}} \quad \left(\text{В} = \frac{\text{Вт}}{\text{А}}\right).$$

На практике часто применяются несистемные единицы:

1 киловольт (кВ) = 1000 В,
1 милливольт (мВ) = 0,001 В.

59. Напряженность электрического поля

Напряженность E электрического поля определяется отношением силы F, с которой данное поле действует на пробный заряд, к величине этого заряда q:

$$E = \frac{F}{q}. \qquad (10)$$

Например, согласно уравнению (7), напряженность электрического поля E_1, созданная точечным зарядом q_1 на расстоянии r от него, равна

$$E_1 = \frac{F}{q_2} = \frac{\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

60. Электрические силовые линии

Электрическое поле графически изображается линиями, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением напряженности поля в той же точке.

Такие линии называются *силовыми*. Силовые линии выходят из положительных зарядов и входят в отрицательные (рис. 64, *а—г*). Густота силовых линий пропор-

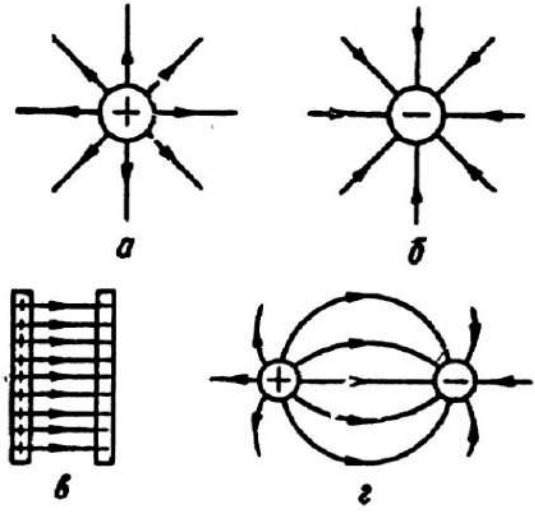


Рис. 64

циональна напряженности. Если силовые линии параллельны, поле называется однородным (рис. 64, *в*).

Силовые линии электрического поля, образованного изменяющимся магнитным полем, являются замкнутыми.

61. Связь между напряжением и напряженностью

В однородном электрическом поле, например в плоском конденсаторе, между напряжением U, напряженностью E и расстоянием d вдоль силовой линии существует связь:

$$U = Ed.$$

Это соотношение вытекает из соотношения между работой и силой: $A=Fd$, если разделить его на величину перемещаемого заряда q и воспользоваться формулами (8) и (10).

Если известно напряжение U между двумя параллельными пластинами (плоский конденсатор) и расстояние d между ними, то напряженность поля E между этими пластинами вычисляется по формуле

$$E=\frac{U}{d}. \qquad (11)$$

62. Единицы напряженности электрического поля

Если непосредственно исходить из определения напряженности электрического поля (формула (10)), то единица напряженности будет называться ньютон на кулон (Н/Кл). Однако в системе СИ единица напряженности устанавливается на основании связи напряженности с напряжением (формула (11)) и называется вольт на метр (В/м).

Легко показать, что наименование Н/Кл эквивалентно В/м, однако общепринятым является последнее наименование *. Это связано с тем, что в системе СИ единицы устанавливаются по принципу практического определения соответствующей физической величины.

63. Конденсатор

Подача электрического напряжения на какое-либо тело связана с возникновением заряда на этом теле. Величина этого заряда зависит от напряжения, размеров тела и соседства других тел. Чтобы сконцентрировать как можно больше зарядов, применяются электрические конденсаторы, состоящие из двух металлических обкладок, разделенных диэлектриком. Диэлектрики — это вещества, которые не проводят электрический ток.

На практике широко применяются *плоские конденса-*

* $\frac{\text{В}}{\text{м}}=\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Кл}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$.

торы, состоящие из двух металлических (станиолевых) пластин, разделенных тонким слоем диэлектрика (парафинированная бумага, слюда). Конденсаторы характеризуются электрической емкостью и рабочим *напряжением.* В схемах конденсаторы обозначаются, как показано на рис. 65.

Рис. 65

64. Электрическая емкость

Электрическая емкость конденсатора определяется количеством электричества, которое нужно перенести с одной обкладки на другую, чтобы между ними изменилось напряжение на 1 вольт.

Электрическая емкость (C) определяется по формуле

$$C = \frac{q}{U}, \qquad (12)$$

где q — заряд на одной из обкладок, U — напряжение между обкладками.

Если известна емкость конденсатора и напряжение на его обкладках, то количество электричества на каждой из обкладок определяется по формуле

$$q = CU.$$

Положительный заряд находится на той обкладке, напряжение которой больше.

65. Единицы электрической емкости

В системе СИ единицей электрической емкости является фарада (Ф), которая устанавливается на основании соотношения (12):

1 фарада = 1 кулон/1 вольт (Ф = Кл/В).

Так как 1 фарада слишком большая единица емкости, чаще используются несистемные единицы:

1 микрофарада (мкФ) $= 10^{-6}$Ф,

1 пикофарада (пФ) $= 10^{-12}$Ф.

66. Емкость плоского конденсатора

Плоский конденсатор характеризуется *размером пластин S, расстоянием между ними d*; величина его емкости определяется по формуле

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

Если пространство между пластинами конденсатора заполнено диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε, то емкость конденсатора увеличивается в ε раз и вычисляется по формуле

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

67. Относительная диэлектрическая проницаемость

Относительная диэлектрическая проницаемость (ε) — величина, характеризующая, во сколько раз емкость конденсатора, заполненного данным диэлектриком, больше емкости того же конденсатора без диэлектрика:

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0},$$

где C — емкость конденсатора с диэлектриком, C_0 — емкость конденсатора без диэлектрика.

Диэлектрические свойства среды сказываются и на взаимодействии зарядов: в диэлектрике с относительной проницаемостью ε заряды воздействуют слабее в ε раз. Для зарядов, находящихся в диэлектрике, закон Кулона записывается в виде

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$$

(сравните взаимодействие зарядов в вакууме, формула (7)).

68. Таблица относительных диэлектрических проницаемостей некоторых диэлектриков при 20 °С

Диэлектрик	Относительная диэлектрическая проницаемость
Вода (дистиллированная)	80
Воздух	1,0006
Глицерин	39
Двуокись титана	40—80
Кварц	3,5—4,1
Керосин	2,1
Плексиглас (органическое стекло)	3,0—3,6
Слюда	4,5—8,0
Спирт	27
Титанат бария	1200
Фарфор	4,4—6,8

69. Электрическая цепь. Источники электрической энергии

Простейшая электрическая цепь состоит из *источника тока 1* (батареи, генератора), *потребителя 2* (лампочки накаливания, электромотора), *соединительных проводов 5* и *рубильника 4* (рис. 66). Чтобы в замкнутой цепи непрерывно протекал электрический ток, необходим непрерывный приток электрической энергии. Источниками электрической энергии могут быть *гальванические батареи* и *аккумуляторы*, превращающие химическую энергию в электрическую; *генераторы*, превращающие механическую энергию в электрическую; *термогенераторы*, работающие за счет тепловой энергии.

Любой источник электрической энергии характеризуется *электродвижущей силой* и *внутренним сопротивлением r*.

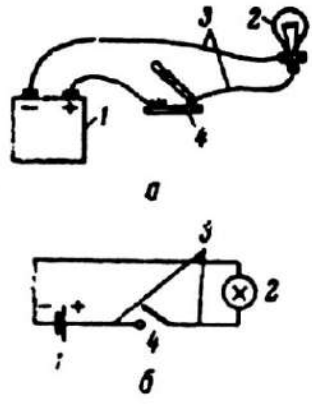


Рис. 66

70. Электродвижущая сила

Электродвижущая сила (э.д.с., или $\mathcal{E}$) источника измеряется отношением мощности P, выделяемой источником, к силе электрического тока I, созданной источником. Причем мощность берется полная, выделяемая как во внешней части цепи, так и внутри источника:

$$\mathcal{E} = \frac{P}{I}. \qquad (13)$$

Электродвижущая сила, как и напряжение, измеряется в вольтах:

$$1\text{В} = \frac{1\text{Вт}}{1\text{А}}.$$

Напряжение, образующееся на полюсах разомкнутого источника тока, равно его электродвижущей силе.

Приведем э.д.с. элементов и аккумуляторов:

	э. д. с., В
Элемент Даниэля	1,1
Элемент Лекланше	1,5
Хромовый элемент	2,0
Железо-никелевый аккумулятор	1,3
Свинцовый аккумулятор	2,1

71. Закон Ома для участка цепи

Закон Ома заключается в том, что для широкого класса проводников при неизменной температуре отношение напряжения на концах проводника к силе тока, протекающего по проводнику, есть величина постоянная для данного проводника. Эта постоянная называется *сопротивлением* проводника и обозначается буквой R:

$$R = \frac{U}{I}. \qquad (14)$$

Сила тока прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению:

$$I = \frac{U}{R}. \qquad (14а)$$

Напряжение равно произведению силы тока на сопротивление:

$$U = IR. \qquad (14б)$$

Уравнения (14)—(14б) — различные варианты закона Ома для участка цепи.

72. Единицы сопротивления

В системе СИ сопротивление проводников измеряется в омах (Ом). Единица сопротивления — Ом — устанавливается на основе уравнения (14):

$$1\ \text{ом} = \frac{1\ \text{вольт}}{1\ \text{ампер}}$$

$$\left(\text{Ом} = \frac{\text{В}}{\text{А}}\right).$$

1 Ом — такое сопротивление проводника, когда при напряжении на концах его в 1 В протекает ток силой в 1 А. Несистемными единицами сопротивления являются:

1 килоом (кОм) $= 10^3$ Ом,
1 мегаом (МОм) $= 10^6$ Ом,
1 гигаом (ГОм) $= 10^9$ Ом.

73. Закон Ома для полной цепи

Полная электрическая цепь включает сопротивление R внешней цепи и сопротивление r самого источника тока. Полное сопротивление цепи равно $R+r$.

Ток в полной цепи (I) определяется электродвижущей силой источника ($\mathcal{E}$). Закон Ома для полной цепи имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

74. Сопротивление однородных проводников

Сопротивление провода при неизменной температуре прямо пропорционально его длине l и обратно пропорционально площади его поперечного сечения S:

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

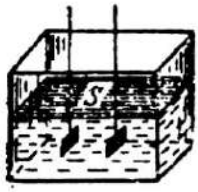


Рис. 67

Величина ρ характеризует вещество проводника и носит название *удельного сопротивления.*

Если проводник жидкий, то за его длину считается *расстояние между электродами,* а за площадь поперечного сечения — *площадь электродов* (рис. 67).

75. Единицы удельного сопротивления

Удельное сопротивление ρ проводника определяется из уравнения

$$\rho = \frac{RS}{l},$$

где R — сопротивление проводника, S — площадь его поперечного сечения, l — длина.

В системе СИ сопротивление R измеряется в омах (Ом), длина l — в метрах (м), площадь S — в квадратных метрах (м^2). Следовательно, единица удельного сопротивления в системе СИ имеет название *ом-метр* (Ом · м). (Определение единицы Ом · м см. стр. 11).

Применяется и несистемная единица удельного сопротивления $\frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$, выражающая сопротивление проводника длиной в 1 м и площадью поперечного сечения в 1 мм^2. Эта единица отличается от системной в 10^6 раз; например,

$$\rho_{\text{меди}} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \text{Ом} \cdot \text{м} = 1{,}7 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}.$$

76. Зависимость сопротивления от температуры

Зависимость сопротивления от температуры выражается уравнением

$$R_t = R_0 [1 + \alpha (t - t_0)],$$

α — термический коэффициент сопротивления, измеряется в кельвинах минус первой степени (К$^{-1}$).

Если α положительно, то сопротивление увеличивается с повышением температуры; если α отрицательно, то сопротивление уменьшается с повышением температуры.

77. Таблица удельных сопротивлений веществ и их термических коэффициентов

Вещество	Удельное сопротивление при 20 °С, Ом·м	Термический коэффициент сопротивления K^{-1}
Металлы		
Алюминий	$2{,}8\cdot10^{-8}$	+0,004
Вольфрам	$5{,}5\cdot10^{-8}$	+0,005
Железо	$9{,}8\cdot10^{-8}$	+0,006
Золото	$2{,}4\cdot10^{-8}$	+0,004
Медь	$1{,}7\cdot10^{-8}$	+0,004
Никель	$7{,}3\cdot10^{-8}$	+0,006
Платина	$10{,}5\cdot10^{-8}$	+0,004
Ртуть	$95{,}8\cdot10^{-8}$	+0,001
Свинец	$21{,}0\ 10^{-8}$	+0,004
Серебро	$1{,}6\cdot10^{-8}$	+0,004
Цинк	$6{,}0\cdot10^{-8}$	+0,004
Сплавы		
Константан	$50\cdot10^{-8}$	+0,00002
Манганин	$45\cdot10^{-8}$	+0,00003
Нихром	$105\cdot10^{-8}$	+0,0001
Никелин	$40\cdot10^{-8}$	+0,0003
Сталь	$11\cdot10^{-8}$	+0,006
Растворы		
Серная кислота: 5%-ная	0,048	−0,012
20%-ная	0,015	−0,014
Соляная кислота: 5%-ная	0,025	−0,015
20%-ная	0,013	−0,015
Поваренная соль: 5%-ная	0,15	−0,02
20%-ная	0,05	−0,02
Изоляторы (диэлектрики)		
Стекло	$\sim10^{8}$	$\sim$−0,02
Слюда	$\sim10^{14}$	
Парафин	$\sim10^{16}$	

78. Проводимость

Величина, обратная сопротивлению, называется *проводимостью* и обозначается буквой Λ:

$$\Lambda = \frac{1}{R}.$$

Единица электрической проводимости в системе СИ — сименс (См):

$$\text{См} = \frac{1}{\text{Ом}}.$$

79. Удельная проводимость

Величина, обратная удельному сопротивлению, называется удельной проводимостью и обозначается буквой λ:

$$\lambda = \frac{1}{\rho}.$$

В системе СИ удельная проводимость измеряется в сименсах на метр (См/м). (Определение единицы См/м см. стр. 11)

80. Реостаты

Реостатами называются приборы, при помощи которых можно изменять сопротивление в цепи и тем самым регулировать в ней силу тока.

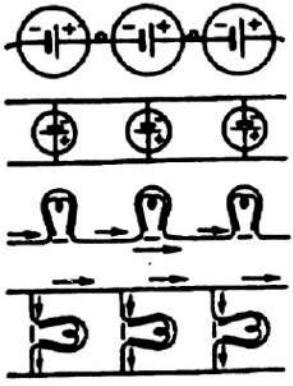


Рис. 68

81. Последовательные и параллельные соединения

Генераторы и приемники электрической энергии могуть быть включены в цепь *последовательно* и *параллельно*. На рис. 68 даны простейшие схемы соединений элементов и лампочек.

82. Сопротивление при различных соединениях

При соединении проводников, имеющих различные сопротивления, их общее сопротивление зависит от того, как они соединены: последовательно или параллельно.

Рис. 69

Если проводники соединены последовательно (рис. 69), то их общее сопротивление равно сумме отдельных сопротивлений

$$R = R_1 + R_2.$$

При параллельном соединении проводников (рис. 70) с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление R определяется из формулы

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Если в разветвлении участвуют не два проводника, а несколько, то

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n},$$

т. е. проводимость разветвления равна сумме проводимостей отдельных ветвей. Если сопротивления всех n ветвей равны между собой, т. е.

$$R_1 = R_2 = R_3 = \cdots = R_n,$$

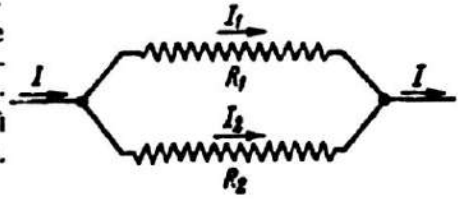


Рис. 70

то

$$\frac{1}{R} = \frac{n}{R_1}, \text{ или } R = \frac{R_1}{n}.$$

83. Сила тока при параллельном соединении

Силы токов I_1 и I_2 в параллельно соединенных ветвях (рис. 70) определяются из соотношения

$$I_1 : I_2 = R_2 : R_1,$$

причем сила тока I, протекающего к точке разветвления, равна сумме сил токов, оттекающих от этой точки, т. е.

$$I = I_1 + I_2,$$

или для n ветвей

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n.$$

84. Электролиты. Ток в электролитах

Химически сложная жидкость (растворы кислот, солей и т. п.), которая разлагается на составные части при прохождении через нее тока, называется *электролитом;* сосуд, в который она налита,— *электролитической ванной; электрод* (платиновая или угольная пластина), через который ток входит в электролит, называется *анодом;* второй электрод, через который ток выходит, называется *катодом* (рис. 71).

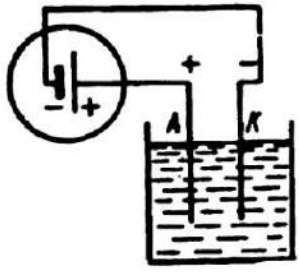


Рис. 71

Процесс выделения на электродах вещества при прохождении тока через электролит называется *электролизом.*

85. Законы Фарадея для электролиза

1-й закон Фарадея

Количество m вещества, выделившегося при прохождении тока через электролит в течение времени t, пропорционально силе тока I и времени t:

$$m = kIt,$$

где k — постоянная для данного вещества величина, называемая его электрохимическим эквивалентом; в системе СИ измеряется в килограммах на кулон (кг/Кл).

Электрохимические эквиваленты некоторых веществ в кг/Кл:

Серебро	$1,118 \cdot 10^{-6}$	Свинец	$1,072 \cdot 10^{-6}$
Медь	$0,823 \cdot 10^{-6}$	Алюминий	$0,094 \cdot 10^{-6}$
Водород	$0,01044 \cdot 10^{-6}$	Кислород	$0,0829 \cdot 10^{-6}$

2-й закон Фарадея

Электрохимический эквивалент вещества пропорционален его химическому эквиваленту. Химическим эквивалентом называется отношение атомной массы (A) к валентности (n); поэтому

$$k = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n},$$

где $\frac{1}{F}$ — коэффициент пропорциональности, F — постоянное число, называемое *числом Фарадея*; в системе СИ

$$F = 96,5 \cdot 10^6 \text{ Кл/кг-экв.}$$

Число Фарадея выражает, какое количество кулонов нужно пропустить через электролит, чтобы выделить 1 *килограмм-эквивалент* вещества.

86. Ток в газах

Газы проводят электрический ток либо под действием ионизаторов (нагреванием, рентгеновскими лучами) — *несамостоятельная* проводимость газа; либо под действием высокого напряжения — *самостоятельная* проводимость. Напряжение для обеспечения самостоятельной проводимости понижается с понижением давления в газах. Это явление можно наблюдать в разрядных трубках (рис. 72).

Под действием тока при самостоятельной проводимости газ излучает свет, причем спектральный состав этого света для каждого газа имеет свои особенности. Ток в

газах не подчиняется закону Ома (рис. 73). Вначале ток растет с повышением напряжения, затем достигает насыщения, величина тока насыщения зависит от мощности

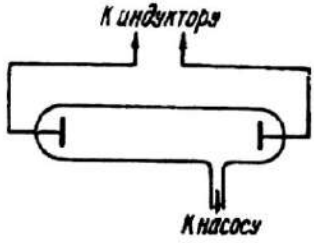


Рис. 72

Рис. 73. Вольт-амперная характеристика тока в газах

ионизатора. При дальнейшем увеличении напряжения наступает самостоятельная проводимость газа, в этом случае ионизация газа обеспечивается самим электрическим полем.

87. Ток в вакууме

Электрический ток в вакууме представляет собой движение электронов, вылетающих из катода (отрицатель-

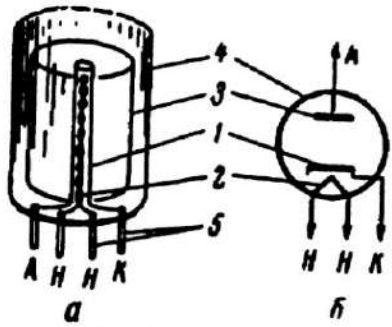


Рис. 74. Двухэлектродная лампа—диод (*а*) и ее схематическое обозначение (*б*): *1* — катод, *2* — подогреватель (*Н*—накал), *3*—анод, *4*—баллон, *5*—штырьки для подключения лампы

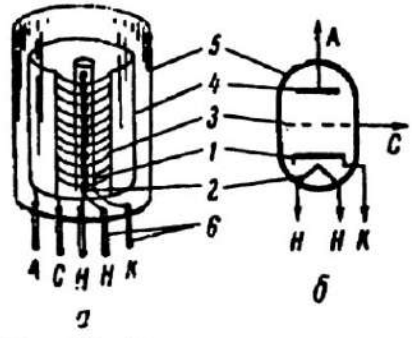


Рис. 75. Трехэлектродная лампа—триод (*а*) и ее схематическое обозначение (*б*): *1* — катод; *2* — подогреватель (*Н*—накал), *3*—управляющая сетка, *4* — анод, *5* — баллон, *6* — штырьки для подключения лампы

ного электрода) и движущихся к аноду (положительному электроду). Электроны из катода могут быть эмиттированы различными причинами: под действием рентгеновских лучей, света, высокого напряжения, нагреванием катода — термоэлектронная эмиссия.

Термоэлектронная эмиссия используется в электронных лампах. Двухэлектродная лампа — диод, у которой имеется анод и подогревной катод (рис. 74), применяется для выпрямления переменного тока. Трехэлектродная лампа, у которой между катодом и анодом располагается управляющая сетка (рис. 75), применяется для усиления электрического сигнала. Слабое изменение напряжения на сетке приводит к усиленным изменениям напряжения в анодной нагрузке (рис. 76).

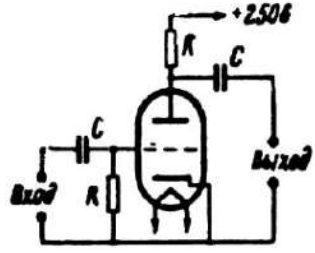


Рис. 76. Усилительный каскад на трехэлектродной лампе

В многоэлектродных лампах имеется несколько сеток. Например, в пентоде (рис. 77), кроме анода и катода, имеется управляющая, экранирующая, антидинатронная сетки. Все эти дополнительные сетки предназначены для увеличения коэффициента усиления лампы.

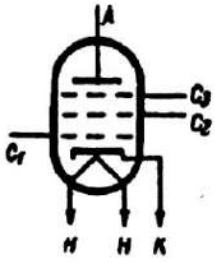


Рис. 77. Пентод (пятиэлектродная лампа): *Н*—накал, *К*—катод, *А*—анод, C_1—сетка управления, C_2—сетка экранирующая, C_3—сетка антидинатронная

88. Полупроводники. Ток в полупроводниках

К полупроводникам относятся вещества, занимающие промежуточное положение по проводимости между хорошими металлическими проводниками и изоляторами:

$$\lambda = 10^{-9} \div 10^{2}\ \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}.$$

Проводимость в полупроводниках в сильной степени зависит от температуры и наличия примесей. Проводимость увеличивается с увеличением температуры и с увеличением числа примесей. Ток в полупроводниках обусловлен движением электронов. Однако движение электронов в полупроводнике происходит по-разному. Одни электроны перемещаются свободно так же, как в металлах, и обусловливают так называемую электронную или негативную проводимость — проводимость *n*-типа. Другие электроны под действием электрического поля перескакивают с одного энергетического уровня на соседний и перемещается таким образом вакантное, незанятое электроном место — «дырка». Перемещение «дырок» обусловливает дырочную, или позитивную, проводимость — проводимость *p*-типа.

В чистом полупроводнике количество свободных электронов равно количеству дырок, и число их возрастает с повышением температуры.

При наличии примесей в зависимости от характера примесей может преобладать либо *n*-проводимость, либо *p*-проводимость.

Особенно интересными свойствами обладает граница перехода от полупроводника с *p*-проводимостью к полупроводнику с *n*-проводимостью, так называемый *p*—*n*-переход. В *p*—*n*-переходе ток может протекать только в одном направлении — от *p* к *n*. Это свойство используется в полупроводниковых диодах для выпрямления переменного тока (рис. 78).

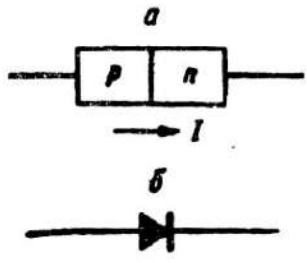


Рис. 78. Полупроводниковый диод (*а*) и его схематическое обозначение (*б*)

Еще более интересными свойствами обладают две близко расположенные границы *p*—*n*-перехода в полупроводниковых транзисторах. Транзисторы могут усиливать электрический сигнал так же, как электронные лампы. Наименованиям катод, сетка, анод в транзисторах соответствуют эмиттер, база, коллектор. В отличие от электронных ламп транзисторы бывают двух типов *p*—*n*—*p* и *n*—*p*—*n* (рис. 79, 80).

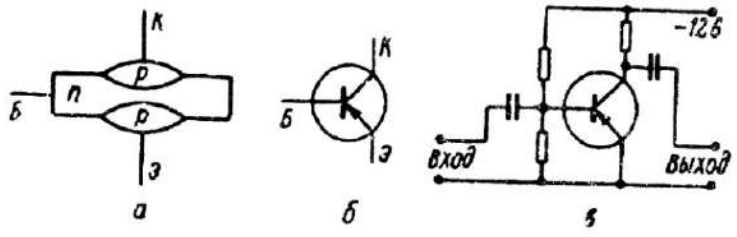


Рис. 79. Транзистор *р-п-р*-типа (*а*), его схематическое обозначение (*б*) и усилительный каскад на транзисторе (*в*): *Б* — база, *Э* — эмиттер, *К* — коллектор

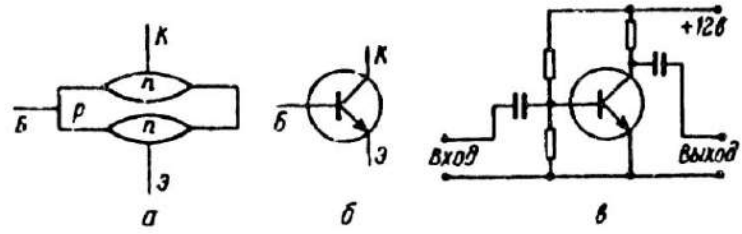


Рис. 80. Транзистор *п-р-п*-типа (*а*), его схематическое обозначение (*б*) и усилительный каскад на транзисторе (*в*): *Б* — база, *Э* — эмиттер, *К* — коллектор

89. Мощность электрического тока

Формула для мощности P, выделяемой в цепи, по которой течет ток I и поддерживается напряжение U, вытекает из определения напряжения (9):

$$P = UI. \qquad (15)$$

90. Работа электрического тока

Так как работа равна произведению мощности на время, то из уравнения (15) вытекает, что работа A, вы-

деляемая в цепи за время t, по которой течет ток I и поддерживается напряжение U, определяется по формуле

$$A = UIt. \qquad (16)$$

91. Единицы работы и мощности электрического тока

В системе СИ работа и все виды энергии измеряются в джоулях (Дж), мощность всех видов энергии измеряется в ваттах (Вт), напряжение — в вольтах (В), ток — в амперах (А), время в секундах (с). Из уравнений (15) и (16) вытекает следующее соотношение для единиц:

$$1\text{Вт} = 1\text{В} \cdot 1\text{А}$$

$$(\text{Вт} = \text{В} \cdot \text{А});$$

$$1\text{Дж} = 1\text{В} \cdot 1\text{А} \cdot 1\text{с}$$

$$(\text{Дж} = \text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с}).$$

Кроме единиц системы СИ, применяются несистемные:
для мощности

1 киловатт (кВт) = 1000 Вт;

для электрической энергии

1 киловатт-час (кВт · ч) = 3600000 Дж.

92. Тепловое действие тока. Закон Джоуля—Ленца

Если по проводникам течет электрический ток, проводники нагреваются. Это используется в лампочках накаливания и нагревательных приборах. Если в цепи, кроме сопротивлений, никаких других потребителей энергии

нет (механических, химических и пр.), то вся работа электрического тока превращается в теплоту:

$$Q = A = UIt$$

$$(\text{Дж} = \text{В}\cdot\text{А}\cdot\text{с}),$$

где Q — количество теплоты, выделенной током.

В системе СИ количество теплоты так же, как и механическая работа и работа электрического тока, измеряется в джоулях (Дж).

Если в цепи, кроме сопротивлений, никаких других потребителей энергии нет, то соотношение между напряжением (U) и током (I) подчиняется закону Ома ($U=IR$).

Следовательно, количество теплоты, выделяемое в цепи, можно представить еще в двух вариантах:

$$Q = RI^2t$$

$$(\text{Дж} = \text{Ом}\cdot\text{А}^2\cdot\text{с})$$

— количество теплоты, выделившейся в проводнике, пропорционально квадрату силы тока, сопротивлению и времени;

$$Q = \frac{U^2}{R}\,t$$

$$\left(\text{Дж} = \frac{\text{В}^2\cdot\text{с}}{\text{Ом}}\right)$$

— количество теплоты, выделившейся в проводнике, пропорционально квадрату напряжения на концах проводника, времени и обратно пропорционально его сопротивлению.

93. Магнитные силы

Проводники, по которым течет электрический ток, взаимодействуют между собой. Силы этого взаимодействия называются *магнитными силами*. Простейший вид магнитного взаимодействия — это взаимодействие *парал-*

лельных проводников с током (рис. 81, *а*). Если токи текут в одном направлении — проводники притягиваются, если в противоположных — проводники отталкиваются (рис. 81, *б*).

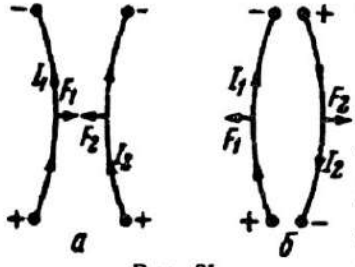


Рис. 81

Еще один вид магнитного взаимодействия — это взаимодействие катушек с током, или *соленоидов*. Если токи текут в одном направлении — катушки притягиваются (рис. 82, *а*); если в противоположных—катушки отталкиваются (рис. 82, *б*) (имеется в виду, что оси катушек совпадают).

В природе существуют *постоянные магниты*, магнитные силы которых обусловлены так называемыми *молекулярными токами*, движением электронов внутри атомов. У некоторых веществ, называемых ферромагнетиками (железо, никель и др.), атомы в кристаллах вещества ориентируются таким образом, что движение валентных электронов происходит в одном направлении (рис. 83). При этом внутри магнита молекулярные токи компенсируют друг друга. Некомпенсированными молекулярные токи остаются только на боковой поверхности магнита. В результате получается, что боковую поверхность магнита как бы обтекает электрический ток, и на поддержание этого тока не надо затрачивать энергию, так как электроны внутри атома движутся без сопротивления.

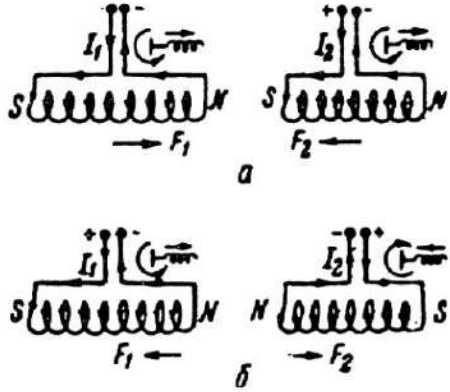


Рис 82

Концы постоянного магнита или соленоида называ-

ются его полюсами: один северный — N, другой южный — S. Называются они так потому, что свободно подвешенный соленоид или магнит одним полюсом поворачивается на север, другим—на юг. Расположение полюсов определяется по *правилу буравчика* (рис. 82, 83): если рукоять буравчика вращать по направлению течения тока, то его поступательное движение будет направлено в сторону северного полюса.

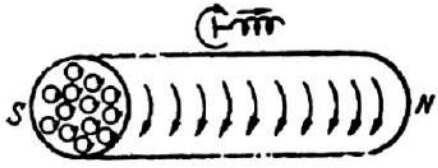


Рис. 83

94. Взаимодействие параллельных проводников с током. Магнитная постоянная

Если имеется два безграничных параллельных проводника с током I_1 и I_2, расположенных на расстоянии a друг от друга в вакууме, то сила F, действующая на участок проводника длиной l, определяется формулой

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{a} l, \qquad (17)$$

т. е. механическая сила пропорциональна произведению токов, обратно пропорциональна расстоянию и прямо пропорциональна длине отрезка проводника; $\mu_0/2\pi$ — коэффициент пропорциональности, μ_0 — *магнитная постоянная*.

В системе СИ

$$\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{генри}}{\text{метр}} \quad \left(\frac{\mu_0}{2\pi} = 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}\right).$$

Примечания: 1. Из формулы (17) вытекает, что μ_0 измеряется $\text{Н} \cdot \text{а}^2$, что эквивалентно Г/м, но последнее наименование является общепринятым *.

2. На основании уравнения (17) устанавливается единица силы тока *ампер* (см. определение ампера стр. 5).

* $\frac{\text{Г}}{\text{м}} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Ом}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{А}^2\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}^2\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}$

95. Магнитное поле

Пространство, в котором проявляются магнитные силы (силы, действующие на ток или на постоянный магнит), называется *магнитным полем*. Магнитное поле удобнее всего исследовать с помощью *магнитной стрелки*, так как к ней не нужно подводить электрический ток.

Магнитное поле характеризуется вектором *индукции* $\vec{B}$; направление вектора индукции совпадает с направлением северного конца магнитной стрелки. Магнитное поле может быть создано как током, так и изменяющимся электрическим полем.

96. Магнитные силовые линии

Для графического представления магнитного поля вводятся *магнитные силовые линии*; касательная силовой линии в каждой точке совпадает с направлением вектора

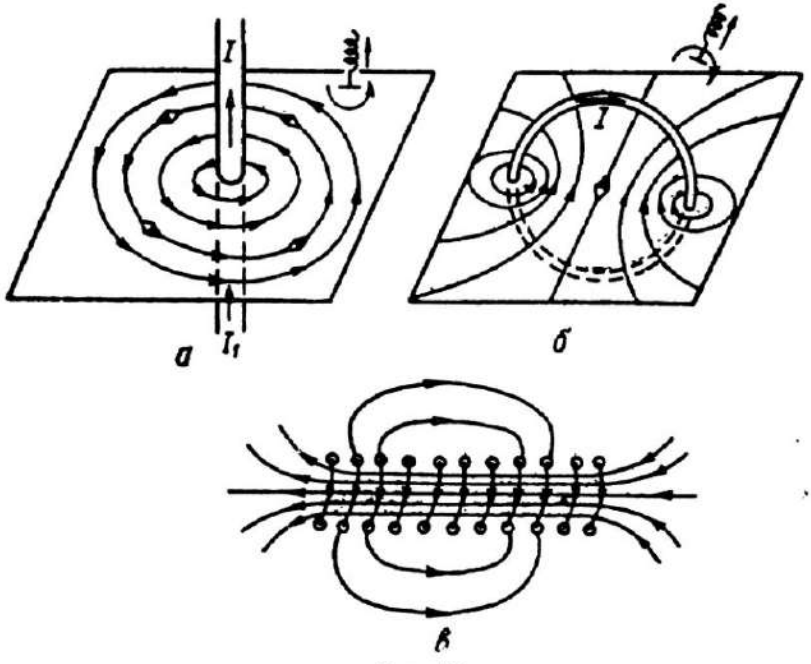


Рис. 84

индукции $\vec{B}$. Свободная магнитная стрелка всегда располагается вдоль силовой линии; положительное направление силовой линии ориентируется в сторону северного конца стрелки. На рис. 84 приведены магнитные силовые линии для случаев прямого тока (*а*), кругового тока (*б*) и соленоида (*в*). Магнитные силовые линии всегда замкнуты.

97. Электромагнит

Электромагнит представляет собой катушку с током, внутрь которой вставлен железный сердечник (рис. 85, *а*, пунктир — магнитные силовые линии). Ферромагнитные

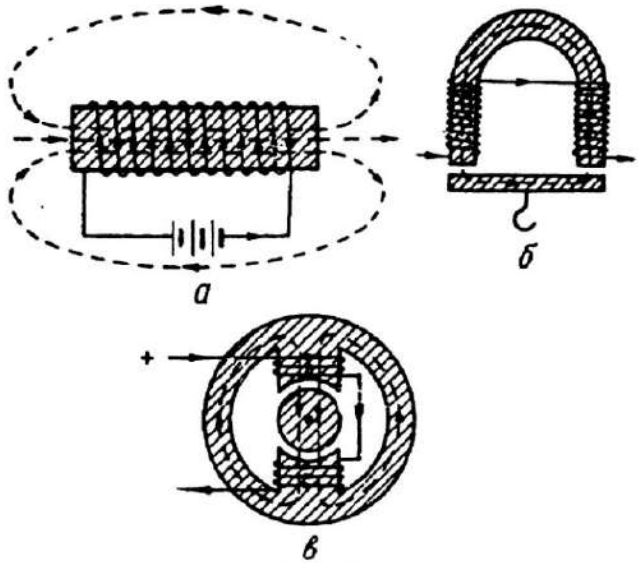


Рис. 85

материалы (железо, никель и др.) обладают замечательным свойством увеличивать в сотни — тысячи раз магнитное поле.

Максимальное значение достигается, если сердечник из ферромагнитного материала замкнутый или почти замкнутый, с зазором (рис. 85, *б*). Это свойство электромагнита используется в технике — железные сердечники

имеют трансформаторы, электрические машины (рис. 85, *в*), различные реле для переключения тока.

98. Действие магнитного поля на ток

Подвижной проводник с током *AB*, находясь в магнитном поле, будет перемещаться под действием этого поля; направление силы, действующей на ток, определяется *правилом трех пальцев левой руки*: указательный палец левой руки должен указывать направление магнитного поля, средний — направление течения тока, а большой палец, расположенный перпендикулярно к ним, — направление механической силы, действующей на ток (рис. 86).

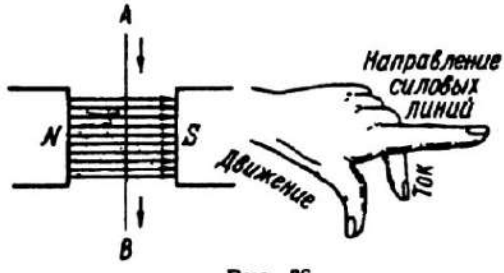


Рис. 86

Механическая сила F, действующая на отрезок проводника с током, пропорциональна величине тока I, длине отрезка l и индукции магнитного поля B. Кроме того, сила зависит от угла α между направлением тока и магнитного поля:

$$F = IlB \sin \alpha. \qquad (18)$$

Если проводник расположен *перпендикулярно* магнитным силовым линиям ($\sin \alpha = 1$), то сила, действующая на проводник, вычисляется по формуле

$$F = IlB. \qquad (18а)$$

Для определения индукции магнитного поля нужно измерить силу F, действующую на отрезок l проводника с током I, расположенный перпендикулярно магнитному полю. Индукция магнитного поля (B) в этом случае определяется формулой

$$B = \frac{F}{Il}. \qquad (19)$$

Например, согласно формуле (17), индукция поля B_1, созданная прямым проводником с током I_1 на расстоянии a от него, равна

$$B_1 = \frac{F}{I_1} = \frac{\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}}{I_2 l} = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi a}.$$

99. Магнитный поток

Магнитный поток Φ определяется числом магнитных силовых линий, пронизывающих какую-либо площадку. Точнее, магнитный поток Φ через площадку S, расположенную перпендикулярно к вектору индукции B, вычисляется по формуле

$$\Phi = BS. \tag{20}$$

Если магнитный поток Φ пронизывает равномерно и перпендикулярно поверхность площадью S, то индукция магнитного поля в точках, лежащих на упомянутой поверхности, равна

$$B = \frac{\Phi}{S}. \tag{21}$$

Магнитный поток связан с работой магнитного поля, затрачиваемой на перемещение контура с током в магнитном поле:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \tag{22}$$

где I — сила тока в контуре; Φ_1 — магнитный поток, пронизывающий контур в начальном состоянии; Φ_2 — магнитный поток, пронизывающий контур в конечном состоянии. Таким образом, если индукция B является *силовой* характеристикой магнитного поля, то поток Φ является его *энергетической* характеристикой.

100. Электромагнитная индукция

Если проводник или катушка перемещаются в магнитном поле и при этом пересекают магнитные силовые линии (рис. 87), то в проводнике или катушке будет

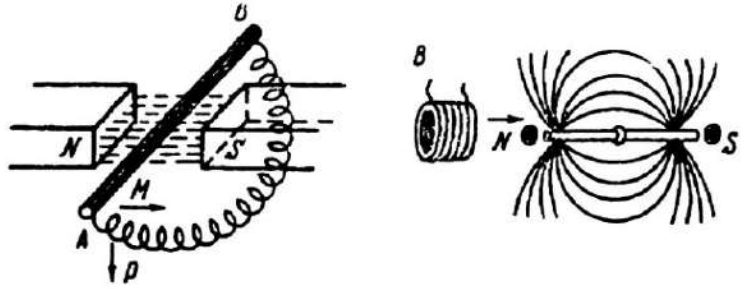


Рис. 87

возникать *индуцированная э.д.с.*, а если проводник или катушка замкнуты, то возникает *индуцированный ток*.

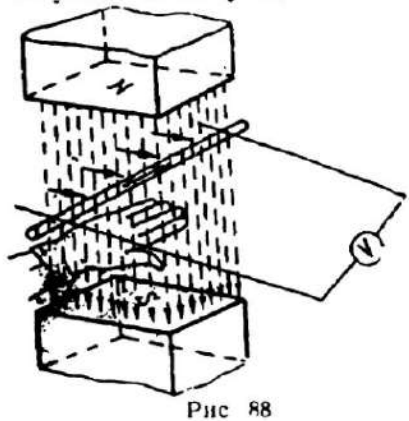


Рис 88

Направление индуцированной э.д.с. определяется *правилом правой руки*. Правую руку с вытянутыми пальцами надо расположить вдоль проводника (рис. 88), движущегося поперек силовых линий так, чтобы силовые линии упирались в ладонь, а отогнутый большой палец указывал направление движения проводника; вытянутые пальцы укажут направление э.д.с.

101. Направление и величина индуцированной э.д.с.

Индуцированный ток всегда возникает такого направления, чтобы своим магнитным полем препятствовать тем причинам, которые его вызывают (*правило Ленца*).

Это своего рода проявление закона действия и противодействия (3-го закона Ньютона) для электрических процессов.

Величина э.д.с. индукции в любом контуре численно равна *скорости изменения магнитного потока* через этот контур:

э.д.с. индукции равна *минус скорость изменения магнитного потока,* или

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \qquad (23)$$

Знак «—» отображает приведенное правило Ленца; $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — *мгновенная скорость изменения магнитного потока:*

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_2 - t_1}$$

при $t_2 \to t_1$,

т. е. когда момент времени t_2 бесконечно мало отличается от момента времени t_1.

Аналогично определяется мгновенная скорость любого процесса. Например, *мгновенная скорость механического движения* определяется по формуле

$$v_{\text{мгн}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

при $t_2 \to t_1$;

Δ характеризует *малое изменение* какой-либо физической величины, например:

$$\Delta t = t_2 - t_1;\ \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1;\ \Delta S = S_2 - S_1.$$

102. Напряжение, возникающее в проводнике, движущемся в магнитном поле

В прямом проводнике длиной l, движущемся со скоростью v в однородном магнитном поле с индукцией B, создается напряжение

$$U = Bvl.$$

При этом проводник должен быть все время расположен перпендикулярно полю, скорость движения его должна быть перпендикулярна как проводнику, так и магнитному полю; в противном случае в уравнение нужно вводить косинусы углов.

Напряжение, возникающее в движущемся проводнике, можно измерить, если концы проводника будут скользить по двум неподвижным проводникам, соединенным с вольтметром (см. рис. 88).

103. Количество электричества, индуцируемое в замкнутом контуре при изменении магнитного потока

Если магнитный поток Φ, пронизывающий замкнутый контур сопротивлением R, исчезает до нуля, то индуцируемый в контуре ток через его поперечное сечение перенесет количество электричества q, равное

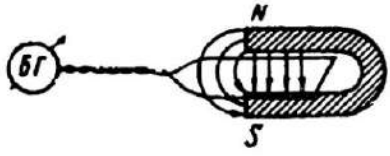


Рис. 89

$$q = \frac{\Phi^*}{R}. \qquad (24)$$

Количество электричества, быстро протекающее в цепи, измеряется *баллистическим гальванометром* (*БГ*, рис. 89).

104. Измерение магнитного потока и магнитной индукции

Для измерения магнитного потока проволочную петлю, подключенную к баллистическому гальванометру

* Доказательство формулы (24). Предположим, что магнитный поток исчезает равномерно, тогда скорость его изменения равна $d\Phi/dt = -\Phi/t$. Знак «—» означает, что поток убывает — скорость отрицательна. При этом в контуре индуцируется э.д.с.: $\mathcal{E} = -d\Phi/dt = \Phi/t$ и течет индуцированный ток $I = \mathcal{E}/R = \Phi/(Rt)$. За время исчезновения магнитного потока через поперечное сечение контура пройдет количество электричества $q = It = \Phi/R$.

(рис. 89), помещают в магнитное поле и потом резко выдергивают ее из магнитного поля (или выключают магнитное поле), тогда магнитный поток (на основании (24)) определяется по формуле

$$\Phi = qR, \tag{25}$$

где q — количество электричества, измеряемое баллистическим гальванометром; $R = R_{\text{гальв}} + R_{\text{петли}}$ — полное сопротивление цепи, состоящее из внутреннего сопротивления гальванометра и сопротивления петли.

Магнитная индукция в большинстве случаев рассчитывается на основании соотношения (21). Нужно замерить магнитный поток, разделить на площадь петли и на число витков петли. (О необходимости деления на число витков см. п. 105).

105. Магнитный поток сцепления

В контуре, состоящем из нескольких витков (n), которые пронизываются одним и тем же магнитным потоком (полностью и частично; если частично, то n — нецелое число), магнитный поток нужно учитывать столько раз, сколько он пронизывает данный контур.

Величина, равная произведению магнитного потока на число витков, называется *магнитным потокосцеплением*, или полным магнитным потоком, и обозначается буквой Ψ:

$$\Psi = n\Phi.$$

С учетом потокосцепления закон электромагнитной индукции (23) имеет вид

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt}. \tag{23а}$$

Формула для количества электричества, индуцируемого в контуре при исчезновении магнитного поля, имеет вид

$$q = \frac{\Psi}{R}. \tag{24а}$$

Магнитный поток сцепления измеряется в тех же единицах, что и магнитный поток,—веберах (Вб).

106. Единицы магнитного потока и магнитной индукции

В системе СИ магнитный поток измеряется в веберах (Вб), магнитная индукция — в теслах (Т). Если воспользоваться формулами определения магнитной индукции (19) и магнитного потока (20), то единицы этих величин выразятся следующим образом:

единица магнитной индукции

$$1 \text{ тесла} = \frac{1 \text{ ньютон}}{1 \text{ ампер} \cdot 1 \text{ метр}}$$

$$\left(\text{Т} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}\right);$$

единица магнитного потока

$$1 \text{ вебер} = 1 \text{ тесла} \cdot 1 \text{ кв. метр}$$

$$(\text{Вб} = \text{Т} \cdot \text{м}^2).$$

Однако единицы системы СИ устанавливаются по принципу практического измерения соответствующей физической величины. Поэтому единица магнитного потока определяется по формуле (25), а единица магнитной индукции — по формуле (21):

единица магнитного потока

$$1 \text{ вебер} = 1 \text{ кулон} \cdot 1 \text{ ом}$$

$$(\text{Вб} = \text{Кл} \cdot \text{Ом});$$

единица магнитной индукции

$$1 \text{ тесла} = \frac{1 \text{ вебер}}{1 \text{ кв. метр}}$$

$$\left(\text{Т} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2}\right).$$

107. Самоиндукция

При протекании электрического тока в контуре магнитный поток сцепления (Ψ) пропорционален силе электрического тока (I):

$$\Psi = LI. \tag{26}$$

Коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью контура, он зависит от геометрической формы и размеров контура и магнитной проницаемости окружающей среды.

С изменением силы тока (I) изменяется и магнитный поток, сцепленный с контуром, а всякое изменение магнитного потока создает э.д.с.:

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = -L\,\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Таким образом, изменение силы тока в контуре приводит к возникновению э.д.с. индукции в том же самом контуре. Это явление называется *самоиндукцией*. Особенно сильно сказывается самоиндукция в цепях, содержащих железные сердечники (электромоторы, трансформаторы, электромагниты).

108. Направление и величина э.д.с. самоиндукции

Явление самоиндукции — это своего рода проявление закона инерции для электрических процессов. Если ток в цепи возрастает, э.д.с. самоиндукции направлена навстречу току и стремится воспрепятствовать этому возрастанию. Если ток в цепи убывает, э.д.с. самоиндукции направлена в сторону течения тока и стремится поддерживать его, чтобы воспрепятствовать этому убыванию.

Величина э.д.с. самоиндукции пропорциональна *скорости* изменения электрического тока и обратно направлена

$$\mathcal{E} = -L\,\frac{\Delta I}{\Delta t}. \tag{27}$$

Знак «—» обозначает тот факт, что $\mathcal{E}$ направлено в сторону, противоположную скорости изменения тока; $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ — *мгновенная скорость изменения электрического тока:*

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_2 - I_1}{t_2 - t_1} \text{ при } t_2 \to t_1,$$

т. е. когда время t_2 бесконечно мало отличается от времени t_1.

109. Индуктивность. Единица индуктивности

Индуктивность, или коэффициент самоиндукции, устанавливается на основании соотношения (26). Индуктивность (L) контура измеряется отношением магнитного потока (Ψ), сцепленного с контуром, к силе электрического тока (I), создающего этот магнитный поток:

$$L = \frac{\Psi}{I}. \tag{28}$$

Это *статическое* определение индуктивности. Чаще применяется *динамическое* определение индуктивности (см. уравнение (27)), где индуктивность есть отношение э.д.с. самоиндукции к скорости изменения электрического тока:

$$L = -\frac{\mathcal{E}}{(dI/dt)}. \tag{29}$$

В системе СИ индуктивность измеряется в генри (Г). Единица индуктивности устанавливается на основании статического определения индуктивности (28):

$$1 \text{ генри} = \frac{1 \text{ вебер}}{1 \text{ ампер}}$$

$$\left(\text{Г} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}}\right).$$

Несистемная единица индуктивности

1 миллигенри (мГ) = 0,001 Г.

110. Электрические машины постоянного тока: электродвигатель, генератор электрической энергии

Машина постоянного тока состоит из индуктора, создающего сильное магнитное поле (индуктором обычно является корпус машины, рис. 90), и вращающегося внутри него якоря (рис. 91). Якорь состоит из цилиндра, набранного из тонких пластин железа, вдоль пазов которого уложены обмотки. Концы обмоток подключены к секторам коллектора. Ток к коллектору подается через щетки. Электрическая машина обладает свойством обратимости. Если ее подключить к сети, машина будет производить механическую работу, т. е. является электродвигателем, превращающим электрическую энергию в механическую. Если ротор машины вращать

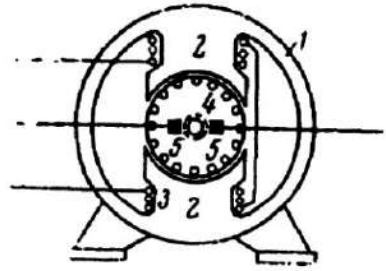


Рис. 90. Машина постоянного тока: *1* — статор, *2* — полюсные наконечники, *3* — обмотка подмагничивания, *4* — якорь, *5* — щетки

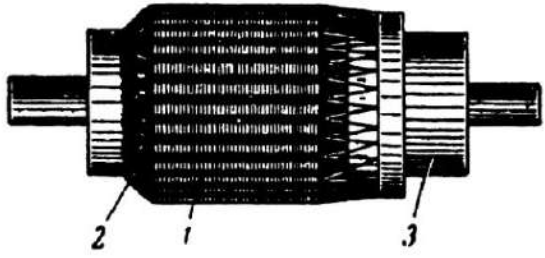


Рис. 91 Якорь машины постоянного тока: *1* — сердечник, *2* — обмотка, *3* — коллектор

внешними силами, то машина будет вырабатывать ток, т. е. явится генератором электрической энергии, превращающим механическую энергию в электрическую.

111. Переменный ток

Если в однородном магнитном поле (рис. 92) будет равномерно вращаться контур из проволоки, то с каждым полным оборотом в контуре возникает периодически изменяющаяся по величине и направлению э.д.с. (и ток, если контур замкнут). Такой ток, периодически (через равные промежутки времени) меняющийся по величине и направлению, называется *переменным током.* Более

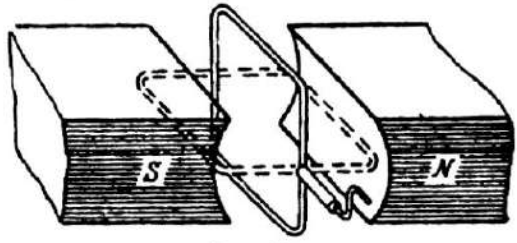


Рис. 92

точно такой ток называется синусоидальным током, так как зависимость величины этого тока от времени характеризуется синусоидальным графиком (см. рис. 93).

Переменный ток характеризуется:

а) периодом T, измеряемым в секундах (с), или

б) линейной частотой

$$\nu = \frac{1}{T},$$

измеряемой в герцах (Гц), или

в) круговой частотой

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T},$$

измеряемой в $с^{-1}$.

Промышленный ток энергетических сетей является переменным, частота его поддерживается строго определенной: в СССР и европейских странах $\nu = 50$ Гц.

112. Эффективное значение э.д.с. и силы тока

При равномерном вращении витка в однородном магнитном поле э.д.с., возникающая в витке, является переменной величиной, пропорциональной синусу угла пово-

рота витка; то же можно сказать и о силе переменного тока, если сопротивление цепи не меняется. Амперметр и вольтметр, включенные в цепь переменного тока, показывают эффективное значение, соответствующее такому постоянному току, который за это же время производит то же энергетическое действие, например тепловое, что и переменный ток. Кривая (синусоида) на рис. 93 показывает, как меняется мгновенное значение тока за время полного оборота витка. По вертикали отложены значения силы тока, а по горизонтали — время, соответствующее тому или иному положению витка.

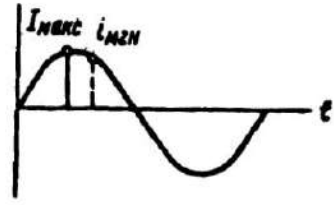


Рис 93

Для синусоидального тока эффективное значение ($I_{эф}$) с амплитудным или максимальным значением ($I_{макс}$) связано соотношением

$$I_{эф} = \frac{I_{макс}}{\sqrt{2}} .$$

Аналогичным образом связаны эффективные и максимальные значения напряжения:

$$U_{эф} = \frac{U_{макс}}{\sqrt{2}} .$$

113. Полное сопротивление и фазовый сдвиг в цепи переменного тока

Если в цепи переменного тока с круговой частотой ω содержится емкость (C) и индуктивность (L) (рис. 94), то закон Ома такой цепи имеет вид

$$\frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} . \qquad (30)$$

Величина $\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ называется *полным* сопротивлением цепи, где R — *активное*, или омическое,

сопротивление цепи; $L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$ — *реактивное* сопротивление цепи. При наличии индуктивности и емкости ток в цепи может либо отставать от напряжения, либо опережать его, т. е. синусоиды тока и напряжения сдвинуты друг относительно друга на некоторый интервал времени.

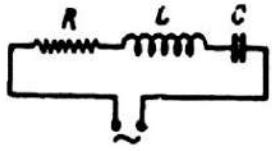


Рис. 94

Этот сдвиг обычно характеризуется *фазой сдвига* (или фазовым углом сдвига). Предельное значение фазового сдвига $+\dfrac{\pi}{2}$ (когда в цепи только индуктивность) и $-\dfrac{\pi}{2}$ (когда в цепи только емкость).

Для цепи (рис. 94) фазовый сдвиг (φ) между током и напряжением вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}. \qquad (31)$$

114. Мощность переменного тока

Мощность переменного тока в каждое мгновение равна произведению мгновенных значений тока и напряжения. Эффективная мощность, однако, не всегда равна произведению эффективных сил тока и напряжения. Если между напряжением и током имеется фазовый сдвиг φ, то активная мощность вычисляется по формуле

$$P = I_{эф} U_{эф} \cos\varphi.$$

Косинус фи, или *коэффициент мощности*, зависит от вида нагрузки и определяется формулой (31) (для последовательной цепи).

Если в цепи отсутствуют индуктивность ($L = 0$) и емкость $\left(\dfrac{1}{C} = 0\right)$, то $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, и, сле-

довательно, в цепи только с активной нагрузкой

$$P_{эф} = I_{эф} U_{эф}.$$

115. Трансформирование тока

Имея переменный ток низкого напряжения и большой силы, можно получить ток малой силы, но высокого напряжения и наоборот (*трансформировать* ток). Это достигается с помощью трансформаторов. На рис. 95 дана схема *трансформатора:* толстая обмотка с небольшим числом витков намотана на замкнутый железный сердечник; с другой стороны намотана тонкая обмотка с большим числом витков. Если по первой обмотке пропустить переменный ток низкого напряжения и большой силы, то по второй пойдет переменный ток высокого напряжения и малой силы.

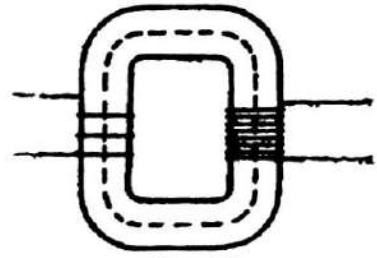


Рис. 95

Между напряжением (U_1, U_2) первичной и вторичной обмоток и числом витков в них (n_1, n_2) существует связь:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Трансформаторы имеют высокий, близкий к 1, коэффициент полезного действия, т. е. мощность, подводимая к первичной обмотке, почти целиком равна мощности, снимаемой со вторичной обмотки.

116. Электромагнитные колебания. Колебательный контур

Колебательным контуром называется цепь, состоящая из емкости и индуктивности (рис. 96). Если на конденсатор подать какой-либо заряд и потом замкнуть его на катушку индуктивности, то разряд будет носить *колебательный* характер: электрическая энергия конденсатора

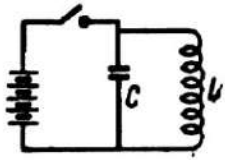


Рис. 96

будет переходить в магнитную энергию катушки и обратно. Период T этих колебаний зависит от величины индуктивности L и емкости C контура и определяется по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

(формула *Томсона*).

Так как любая катушка имеет сопротивление, то часть этой энергии выделяется в виде тепла и колебания носят затухающий характер.

Для того чтобы колебания были незатухающими, необходим *электронный переключатель*, использующий либо *электронную лампу*, либо *полупроводниковый транзистор*, который автоматически в нужный момент пропускает через себя ток и тем самым добавляет энергию, как бы подталкивает колебания. Такое устройство называется *генератором незатухающих колебаний*.

117. Электромагнитные волны

От колебательного контура (особенно если он *открытый*, связан с *антенной* — рис. 97, *а* или *вибратором* — рис. 97, *б*) распространяются *электромагнитные волны*. Эти волны представляют собой взаимно изменяющиеся

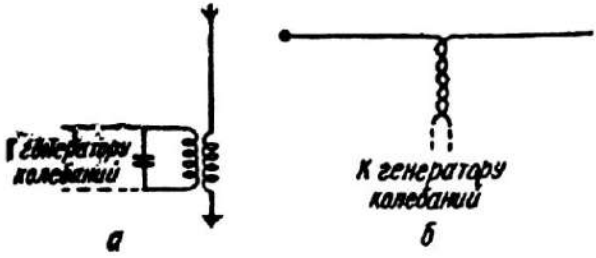


Рис. 97

электрическое и магнитное поля. *Скорость* распространения электромагнитных волн в вакууме (или в воздухе) равна

$$c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Эти волны распространяются на значительные расстояния и могут воздействовать на другой колебательный контур, настроенный в резонанс с первым. Так осуществляется *радиосвязь*.

Примечание. Электрическая постоянная ε_0 (стр. 137), магнитная постоянная μ (стр. 161) и скорость распространения электромагнитных волн в вакууме c_0 связаны соотношением

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

V. СВЕТ

118. Скорость света

Свет распространяется в различных средах с различной скоростью; *скорость света* в вакууме или в воздухе равна $c_0 = 3 \cdot 10^8$ м/с, или 300 000 км/с,— такая же, как радиоволн, так как природа радиоволн и света одинакова.

119. Сила света

Сила света того или иного источника измеряется в канделах (кд) (определение эталона силы света приведено на стр. 6). На практике обычно пользуются *вторичными эталонами* — определенным образом изготовленными лампочками накаливания, которые тщательным образом сверяются с *основным эталоном*.

Приборы, сравнивающие силу света двух источников, называются *фотометрами*.

120. Световой поток

Световой поток (Φ), заключенный внутри телесного угла Ω, в вершине которого расположен точечный источник света силой I, определяется формулой

$$\Phi = I\Omega.$$

Если источник света является изотропным (по всем направлениям его сила света одинакова), то полный световой поток, излучаемый этим источником, равен

$$\Phi = I 4\pi.$$

В системе СИ световой поток измеряется в люменах (лм):

1 люмен = 1 кандела · 1 стерадиан

(лм = кд · ср).

121. Освещенность

Освещенность определяется световым потоком, падающим на единицу поверхности:

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

В системе СИ освещенность измеряется в люксах (лк):

$$1 \text{ люкс} = \frac{1 \text{ люмен}}{1 \text{ м}^2} \quad \left(\text{лк} = \frac{\text{лм}}{\text{м}^2}\right).$$

Приборы, измеряющие освещенность, называются *люксметрами*.

122. Законы освещенности

Один и тот же источник света по-разному освещает поверхность в зависимости от того, на каком расстоянии находится эта поверхность от источника и под каким углом наклонена к лучам света.

1-й закон освещенности

Освещенность площадки, расположенной перпендикулярно к лучам света, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от источника:

$$E = \frac{I}{r^2}.$$

2-й закон освещенности

Если освещаемая поверхность наклонена под углом к лучам света, то ее освещенность пропорциональна ко-

синусу угла между направлениями луча и перпендикуляром к площадке (косинусу угла падения лучей):

$$E_\alpha = E_0 \cos\alpha,$$

E_0 — освещенность в случае *нормального* падения лучей ($\alpha = 0$).

Обобщенный закон освещенности

Если освещенная поверхность находится на расстоянии r от источника света силой I и наклонена под углом падения лучей α (угол между падающим лучом и перпендикуляром к поверхности), то освещенность этой поверхности вычисляется по формуле

$$E = \frac{I}{r^2} \cos\alpha,$$

где I измеряется в канделах (кд), r — в метрах (м), E — в люменах (лм).

123. Законы отражения света

Луч света, падающий на гладкую поверхность (*зеркало*), отражается от нее по следующим законам: 1) угол падения SAB равен углу отражения S_1AB; 2) лучи падающий SA и отраженный S_1A лежат в одной плоскости с перпендикуляром AB к зеркалу в точке падения (рис. 98).

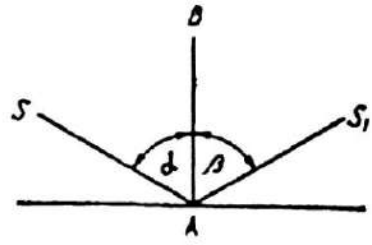


Рис. 98

124. Сферические зеркала

Сферические зеркала представляют собой небольшую полированную часть сферы (например, металлического шара). Сферическое зеркало называется *выпуклым*, если отражает свет своей выпуклой поверхностью, и *вогнутым*, если вогнутой поверхностью. Ось, проходящая через середину сферического зеркала и центр сферы, называется *главной оптической осью зеркала*.

125. Формула вогнутого зеркала

Если на главной оси AB вогнутого зеркала (рис. 99) помещен точечный источник света S, то любой центральный луч, посылаемый им, после отражения будет проходить через одну определенную точку S_1 — изображение точки S.

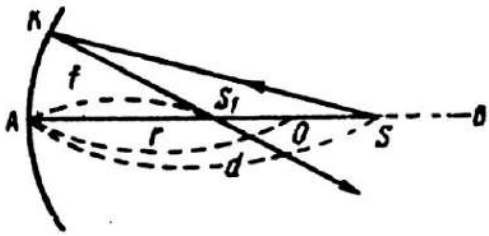


Рис. 99

Расстояния точек S и S_1 от середины зеркала A связаны между собой следующим соотношением (*формула вогнутого зеркала*):

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{2}{r}\,, \qquad (32)$$

где d — расстояние от зеркала до светящейся точки S, f — расстояние до ее изображения S_1, r — радиус зеркала.

126. Фокус вогнутого зеркала

Центральные лучи, идущие параллельно главной оптической оси (рис. 100), пройдут через точку C, которая называется *фокусом* зеркала, причем расстояние

$$AC=F=\frac{r}{2}\,,$$

и формула (32) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\,.$$

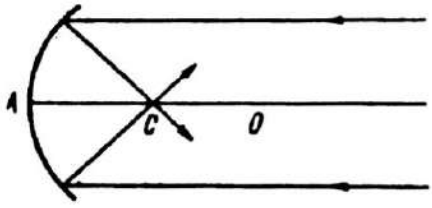


Рис. 100

127. Показатель преломления

Когда луч света переходит из одной прозрачной среды, например воздуха, в другую, например воду, то на поверхности раздела MN обеих сред он меняет направление — преломляется (рис. 101).

Если обозначить через α угол падения, через β — угол преломления, то величина

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

будет *показателем преломления* второй среды относительно первой. Показатель преломления n равен отношению скорости света той среды, из которой луч выходит (c_1), к скорости света той среды, в которую луч входит (c_2), т. е.

$$n = \frac{c_1}{c_2}.$$

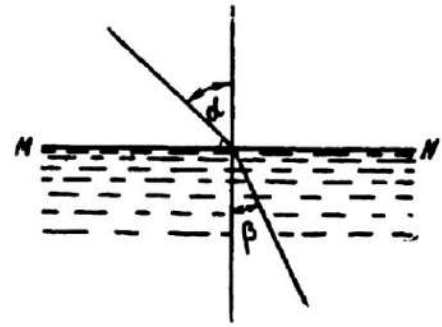


Рис. 101

Если луч идет из «пустоты» в среду, то $n_0 = \frac{c_0}{c}$, т. е. отношение c_0—скорости света «в пустоте»—к c—скорости света в данной среде—называется *абсолютным показателем преломления*. Для стекла он равен (округленно) 3/2, для воды 4/3, для воздуха 1,0003 (практически 1).

128. Отклонение лучей при преломлении

Если луч света проходит сквозь среду, которая ограничена двумя параллельными плоскостями, например оконное стекло, то он дважды преломится и в результате не изменит своего начального направления,

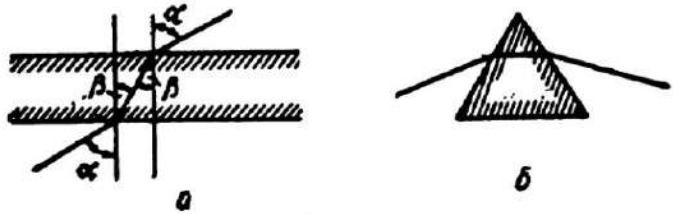


Рис. 102

а пойдет параллельно ему (рис. 102, *а*). При прохождении через *трехгранную призму* луч отклонится призмой к ее основанию (рис. 102, *б*).

129. Линзы

Прозрачная среда (обычно стекло), ограниченная двумя сферическими поверхностями, называется *линзой*. В зависимости от формы линзы бывают собирающие (например, *двояковыпуклые* — рис. 103, *а*) и рассеивающие (например, *двояковогнутые* — рис. 103, *б*). Прямая, соединяющая центры обеих сфер, называется *главной оптической осью линзы*.

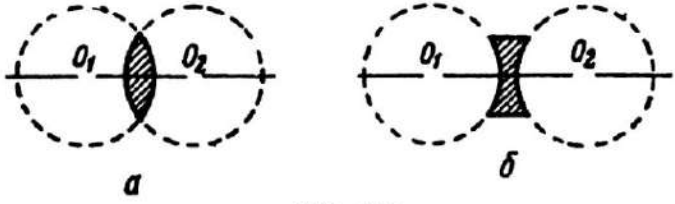


Рис. 103

130. Фокус двояковыпуклой линзы

Центральные лучи света, идущие параллельно главной оси двояковыпуклой линзы, после преломления собираются в ее *фокусе* C (рис. 104). Фокусное расстояние двояковыпуклой линзы выражается формулой

$$F = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)},$$

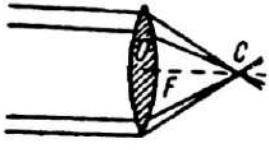


Рис. 104

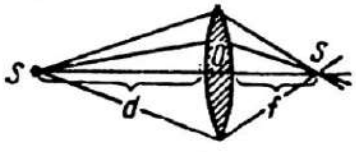


Рис. 105

где n — показатель преломления вещества линзы, а r_1 и r_2 — радиусы сферических поверхностей, ограничивающих линзу.

131. Формула двояковыпуклой линзы

Расстояние d светящейся точки S до двояковыпуклой линзы связано с расстоянием f ее изображения до линзы (рис. 105) формулой

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

где F — фокусное расстояние (расстояние от фокуса до линзы).

132. Преломление различных лучей. Спектр

Лучи разных цветов преломляются в различной степени. Так, например, красные лучи стеклянная призма в воздухе менее всего отклоняет к своему основанию, фиолетовые — более всего. В порядке увеличивающейся преломляемости идут лучи следующих цветов: красные,

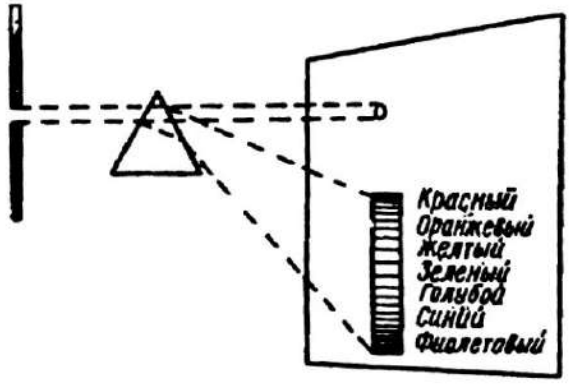


Рис. 106

оранжевые, желтые, зеленые, голубые, синие и фиолетовые. Если из горизонтальной узкой щели (рис. 106), освещенной белыми лучами, пропустить через горизонтально расположенную призму пучок белых лучей, то получится вертикальный *спектр*, состоящий из всех цветов. Белый луч содержит в себе все цвета.

133. Различные спектры

Если пучок белого света от раскаленных твердых или жидких тел пропустить через призму, то получится *сплошной спектр*; если же цель осветить лучами от светящихся паров и газов, то прошедший через призму пучок дает *прерывистый* (*линейчатый*) *спектр*, состоящий из цветных линий или полос, разделенных темными промежутками; наконец, белый луч, прошедший предварительно через какую-нибудь среду, а затем через призму, дает *спектр поглощения*, так как часть цветных лучей поглощает среда.

134. Невидимые лучи

Глаз неодинаково чувствителен к лучам различной цветности (различной длины волны); наиболее чувствителен он к лучам желто-зеленым. К лучам, лежащим за красным и фиолетовым концами сплошного спектра (*инфракрасные и ультрафиолетовые лучи*), глаз вовсе не чувствителен; эти невидимые для глаз лучи действуют, например, на очень чувствительный термометр (инфракрасные), на фотографическую пластинку (ультрафиолетовые), на ряд самосветящихся тел и т. д. К числу невидимых лучей относятся и так называемые *лучи Рентгена*, которые обладают способностью проникать через непрозрачные для видимых лучей тела. Наименее прозрачны для этих лучей тяжелые металлы, наиболее прозрачны — дерево, тело человека. Эти лучи используют в технике и медицине.

135. Длины электромагнитных и световых волн

Различные виды излучений отличаются друг от друга длиной волны λ или частотой колебаний ν, которые связаны между собой соотношением

$$\lambda = \frac{c_0}{\nu},$$

где $c_0 = 3 \cdot 10^8$ м/с (скорость света), λ измеряется в метрах (м), ν—в герцах (Гц).

Лучи по длинам волн распределены примерно следующим образом:

$\lambda = 10^{4}—10^{-4}$ м — радиоволны; используются в радиотехнике, радиолокации;

$\lambda = 10^{-4}—10^{-8}$ м — инфракрасные лучи, или тепловые, в основном участвуют при переносе тепла от одного тела к другому;

$\lambda = 8 \cdot 10^{-7}—4 \cdot 10^{-7}$ м — видимые лучи (лучи, которые действуют на глаз человека); они также участвуют в переносе тепла от одного тела к другому;

$\lambda = 4 \cdot 10^{-7}—5 \cdot 10^{-9}$ м — ультрафиолетовые лучи;

$\lambda = 5 \cdot 10^{-9}—4 \cdot 10^{-12}$ м — рентгеновы лучи;

$\lambda = 4 \cdot 10^{-12}—10^{-13}$ м — гамма-лучи, излучаемые при ядерном превращении.

Видимые лучи можно разделить по основным цветам:

красный	$\lambda = 7{,}6 \cdot 10^{-7}—6{,}2 \cdot 10^{-7}$ м	=760—620 нм,
оранжевый	$\lambda = 6{,}2 \cdot 10^{-7}—5{,}9 \cdot 10^{-7}$ м	=620—590 нм,
желтый	$\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-7}—5{,}6 \cdot 10^{-7}$ м	=590—560 нм,
зеленый	$\lambda = 5{,}6 \cdot 10^{-7}—5{,}0 \cdot 10^{-7}$ м	=560—500 нм,
голубой	$\lambda = 5{,}0 \cdot 10^{-7}—4{,}8 \cdot 10^{-7}$ м	=500—480 нм,
синий	$\lambda = 4{,}8 \cdot 10^{-7}—4{,}5 \cdot 10^{-7}$ м	=480—450 нм,
фиолетовый	$\lambda = 4{,}5 \cdot 10^{-7}—3{,}8 \cdot 10^{-7}$ м	=450—380 нм.

136. Источники света

Элементарными источниками света являются атомы и молекулы, в которых происходят энергетические изменения. Если система переходит из высшего энергетического состояния E_1 в низшее E_2, то при этом излучается квант (порция) света с частотой ν, определяемой формулой Планка:

$$\nu = \frac{E_1 - E_2}{h},$$

где $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. В высшее (возбужденное) энергетическое состояние система (атом, молекула) может быть переведена следующими причи-

нами: нагреванием, под действием электрического тока, рентгеновским излучением, а также самим же светом.

а) *Раскаленные твердые тела и жидкости* излучают *сплошной спектр*, который, будучи пропущен через щель и призму, дает спектр радуги, непрерывно переходящий от красного к фиолетовому. Причем интенсивность различных участков спектра различная: длина волны $\lambda_{макс}$, на которую приходится максимум интенсивности, зависит от абсолютной температуры T нагретого тела. Для абсолютно черного тела $\lambda_{макс}$ определяется формулой Вина:

$$\lambda_{макс} = \frac{b}{T},$$

где $b = 0{,}0029$ м · К — постоянная Вина.

б) *Раскаленные газы*, а также газы под действием электрического тока испускают *линейчатый спектр*. Если свет от газа пропустить через щель и призму, то на фоне сплошного спектра появятся ярко окрашенные линии. Причем набор этих линий характерен для каждого химического элемента. На этом принципе производится спектральный анализ веществ.

в) *Различные виды люминесценции. Фотолюминесценция* (излучение света под действием света). Ряд веществ жидких (родамин, флюресцеин), кристаллических (кристаллофосфоры), ряд органических соединений обладают свойством излучать свет под воздействием света. Обычно длины волн излучаемого света больше, чем возбуждаемого, например под воздействием ультрафиолетового света происходит излучение видимого света.

Электролюминесценция. Ряд кристаллических соединений обладает свойством излучать свет под действием переменного электрического поля.

Катодолюминесценция. Свечение под действием быстро летящих электронов в вакууме, например экран телевизора.

г) *Оптические квантовые генераторы света — лазеры.* Это сравнительно новые источники света, обладающие высокой монохроматичностью (вся излучаемая энергия

распределена около одной длины волны, в спектре лазера всего одна линия), высокой направленностью луча, большой мощностью излучаемой энергии.

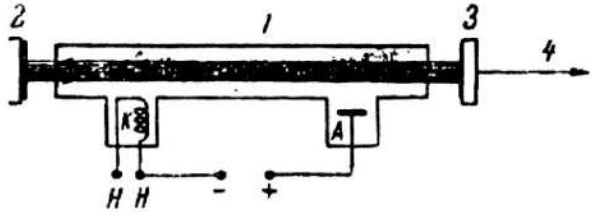


Рис. 107. Газовый лазер: *1* — газоразрядная трубка с рабочим веществом, *2* — зеркало, *3* — частично прозрачное зеркало, *4* — луч, *К* — катод, *А* — анод, *Н* — накал

Во всех прочих источниках света атомы излучают свет некогерентно (с разной фазой, в разнобой как бы), при этом интенсивность света пропорциональна количеству излучаемых атомов. В оптических квантовых генераторах атомы излучают свет когерентно, излучение ато-

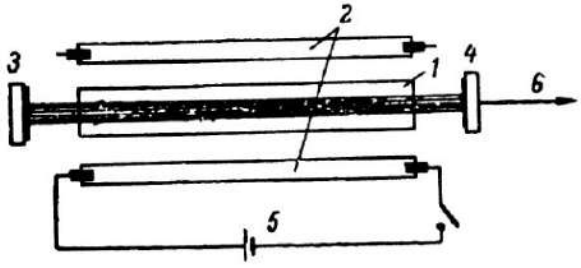


Рис. 108. Рубиновый лазер: *1* — стержень из активированного рубина, *2* — лампы накачки (мощные ртутные лампы 6—8 шт.), *3* — зеркало, *4* — частично прозрачное зеркало, *5* — батарея, *6* — луч

ма индуцируется самим светом; при когерентном излучении интенсивность света пропорциональна квадрату излучаемых атомов.

В возбужденное состояние атомы оптического квантового генератора могут быть переведены электрическим

током (газовые лазеры, рис. 107), светом (ультрафиолетовым), обычно с помощью мощных ртутных разрядных ламп, расположенных вокруг рабочего тела (рубин, неодимовое стекло и ряд других твердых тел, рис. 108).

Необходимым условием работы лазера является многократное прохождение луча через рабочее вещество, что достигается с помощью двух зеркал, одно из которых частично прозрачное, обеспечивающее возможность выхода луча наружу.

VI. ЗВУК

137. Колебательные движения

Зажатая с одного конца колеблющаяся стальная полоска (рис. 109, *а*), колеблющаяся натянутая струна (рис. 109, *б*), у которых каждая частица A тела качается около своего центрального положения A_0 перпендикулярно длине тела, представляют примеры *поперечных колебаний*. Если к укрепленной с одного конца стальной пружине подвесить небольшую гирьку и несколько ее

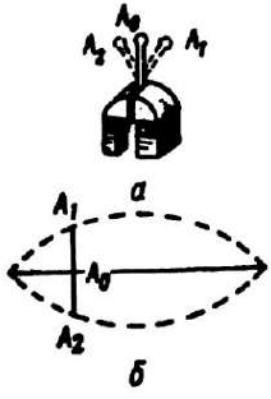


Рис. 109

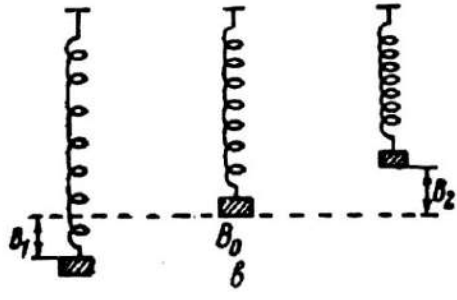


Рис. 110

оттянуть, а затем предоставить самой себе (рис. 110), то каждая точка B пружины будет совершать колебания вдоль её длины; это — пример *продольных колебаний*.

138. Период, частота, амплитуда

Время T, в течение которого все частицы A колеблющегося тела (рис. 109), выйдя из крайнего (например, для рис. 109, *а* — правого) положения, снова возвратятся в это положение, или, иными словами, время, в течение которого каждая точка тела совершит одно полное колебание, называется *периодом колебания*.

Число f полных колебаний, совершаемых частицей или телом в 1 с, называется *частотой колебания*:

$$T = \frac{1}{f}, \quad \text{или } f = \frac{1}{T}$$

Частота измеряется в герцах (Гц); частоту в 1 Гц имеет тело, совершающее в 1 с одно колебание.

Расстояние A_1A_0 или B_1B_0 (рис. 110) колеблющейся частицы от своего крайнего до среднего положения (положения равновесия) называется *амплитудой колебания*.

139. Волны на воде

Падая на гладкую поверхность воды, камень заставит частицы воды, лежащие под ним, несколько опуститься; после прохождения камня частицы поднимутся и затем

а *б*

Рис. 111

начнут колебаться: от места, куда упал камень, распространится одна поперечная круговая волна, состоящая из *гребня и впадины* (рис. 111). Расстояние λ, на которое отстоят друг от друга два соседних гребня или две соседние впадины, называется *длиной поперечной волны*.

Аналогичные поперечные волны будут распространяться по натянутой струне, по стержню, зажатому на одном конце, и т. п., если по ним слегка ударить.

140. Волны в воздухе

Всякое колеблющееся тело — струна, камертон *, колокольчик и т. п. (рис. 112) — вынуждает колебаться с тем же периодом T и прилегающие к телу слои воздуха:

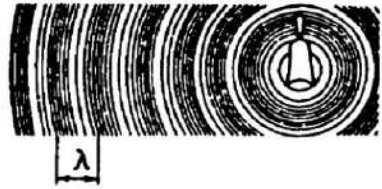


Рис. 112

в воздухе возникают продольные волны, состоящие из сгущений и разрежений. Расстояние λ, на которое отстоят друг от друга два соседних сгущения или два соседних разрежения, называется *длиной продольной волны*. При частоте от 16 до 20 000 колебаний в секунду воздушные волны воспринимаются ухом как звук.

141. Скорость распространения волн

Возникшие в упругой среде волны распространяются с определенной для данной среды скоростью v, зависящей от температуры среды. Так, скорость звука при 0° С в воздухе 331 м/с (при 16°—340 м/с), в воде — 1450 м/с, в железе — 5100 м/с, в стекле — 5500 м/с.

* Инструмент, служащий для определения высоты тона.

142. Зависимость длины волны от периода (частоты) колебания

Если тело колеблется с периодом T (частотой f), то за это время колебание распространится на λ — длину одной волны, т. е.

$$\lambda = vT, \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{v}{f}.$$

143. Отражение волн

Направление AB, по которому распространяется звук, называется *звуковым лучом*. Если линейные размеры упругой поверхности, на которую падает звуковой луч, больше длины падающей волны, то волна отражается, причем угол падения ABC равен углу отражения CBD (рис. 113).

Отражение волны ухо воспринимает как *эхо*.

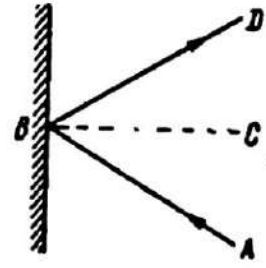


Рис. 113

144. Дифракция волн

Если линейные размеры тела, находящегося на пути распространения воздушных волн, невелики по сравнению с длиной волны, то волны огибают препятствие. Это явление называется *дифракцией волн*.

145. Интерференция волн

Если две системы звуковых волн одного и того же периода посылаются в одну точку и в этой точке налагаются друг на друга либо своими сгущениями, либо своими разрежениями, то звук усиливается; если же сгущение одной системы волн налагается на разрежение

другой, то звук в этой точке может быть либо слабее, либо вовсе исчезнуть; явления усиления или ослабления звука при наложении волн называются *интерференцией* звуковых волн.

146. Резонанс

Если частота собственных колебаний двух тел (камертонов, струн и т. п.) одинакова и одно из этих тел приведено в колебание и звучит, то начнет звучать (откликаться) и другое тело: воздушные волны, создаваемые первым телом, своими толчками будут раскачивать второе; явление отклика одного тела на колебания другого называют *акустическим резонансом*.

147. Высота тона

Высота тона определяется его частотой f: у высоких тонов частота большая, у низких — малая. Ухо воспринимает тона в среднем в пределах частот от 16 до 20 000 в секунду; музыкальные тона заключаются между 30 и 5 000 колебаний в секунду. Если звуки очень быстро следуют один за другим и при этом ухо не различает их высоты, то они воспринимаются как *шум*.

148. Сила и громкость звука

Сила звука в данной точке определяется количеством энергии, проходящей в 1 с через площадку в 1 м², расположенную перпендикулярно к направлению звука; сила звука измеряется единицами Вт/м².

Громкость звука зависит от высоты тона и изменяется приблизительно пропорционально логарифму силы звука.

149. Бинауральный эффект

Звуковые волны обычно подходят к одному уху несколько раньше, чем к другому. Уши способны различать эту разницу по времени, если она не меньше примерно 0,00003 с. Это явление носит название *бинаурального эффекта*. Чтобы определить направление, откуда идет звук, человек поворачивает голову лицом к источнику звука так, чтобы оба уха услышали звук одновременно. Указанным эффектом пользуются при устройстве *звукоуловителя*.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютный нуль температуры 21, 119
Авогадро число 21
Аккумуляторы 145, 146
Акустический резонанс 194
Алфавит греческий 3
— латинский 3
Алфавитный список единиц 16
Ампер 4, 5, 137
Ампер-секунда 137
Амплитуда колебания 94, 191
Ангстрем 16
Анод 152, 155
Апофема многоугольника 67
— пирамиды 75
— усеченной пирамиды 75
Архимеда закон 116
— для газов 117
Атмосфера 117
— нормальная 16, 21, 114, 118
— техническая 16, 114
Атомная единица массы 21

База 156, 157
Бар 17
Барометр 118
Бинауральный эффект 195
Биномиальные коэффициенты 60
Бином. Ньютона 59
— свойства 59
— расширения 123
Биссектриса треугольника 63
— угла 64
Бойля—Мариотта—Гей-Люссака закон 123
Бойля—Мариотта закон 118

Ватт 9, 105
Ватт-час 17
Вебер 12, 17, 170
Вектор 95
Вес 102
Взаимодействия параллельных токов закон 160
Вода, особенность при охлаждении 129
— температура кипения (таблица зависимости от давления) 131
Водяной пар (таблица давления и плотности) 131
Возведение в степень 32
— комплексных чисел 46
Волны в воздухе 192
— на воде 191
— электромагнитные 178
Вольт 10, 139
Вписанный круг, центр 65
— — радиус 86
Время, единица 4, 5
Всемирного тяготения закон 109

Газ, давление 117, 118
Гальванические батареи 145, 146

Гаусс 16, 17
Гей-Люссака закон 123
Гектар 15
Гекто 13
Генератор 173
Генри 12, 172
Герона формула 66
Герц 8, 191
Гига 13
Гипотенуза 61
Главная оптическая ось зеркала 181
— — линзы 184
Гравитационная постоянная 21, 109
Градус дуговой 70
— угловой 17, 70
— Реомюра 17
— Фаренгейта 17
— Цельсия 17, 119
Грамм, ед. массы 16, 18
Грамм-сила 18, 95

Давление 8, 113
— атмосферы 117
— газов 117, 118
— жидкости 115
Даниэля элемент 146
Движение 88, 89
— винтовое 92
— вращательное 90
— закон движения 89
— поступательное 88
— равномерное 89
— равноускоренное 92
Действительные и мнимые решения квадратного уравнения 38
Дека 13
Деци 13
Джоуля—Ленца закон 158
Джоуль 9, 104, 125, 158
Диаметр 69
Дина 16, 18
Динамика, законы 102
— определение 88
— основное уравнение 102
Диод вакуумный 155
— полупроводниковый 156
Дифракция волн 193
Диэлектрики 144, 145
Длина, единица 4, 5
— волны звука 192
— волны света 186
Дополнительные углы 83
Дроби 28
— деление 28
— сложение и вычитание 28
— умножение 28
Дуга, длина 70, 71
Дюйм 18

Единицы, несистемные 13
— системы СГС 16
— системы СИ 5
Емкость (электрическая), единицы 11, 143
— определение 143
— плоского конденсатора 144
Заряд электрона 21, 137
Звук 190
— громкость 194
— сила 194
— отражение 193
Звукоулавливатель 194
Зеркало 181
— вогнутое 181, 182
— выпуклое 182
Зубчатые колеса 91

Извлечение корня 33, 35, 36
— из комплексного числа 47

Изображение точки (физика, свет) 172, 175
Изоляторы—см. Диэлектрики
Индуктивность, единицы 12, 172
Индуктор электромотора 173
Индукция магнитного поля, единица 12, 170
Индукция электромагнитная 166
Индуцированная электродвижущая сила 166
Индуцированный ток 166
Инерции, закон 102
— момент 105
— — простейших тел 106
Интерференция волн 194
Инфракрасные лучи 186, 187
Испарение 130

Калория 18, 125
Кандела 4, 6, 179
Касания точка 68
Касательная 68
Катет 61
Катод 152, 155
Квадрат 62
— основные свойства 62
— площадь 66
— разности (формула) 27
— суммы (формула) 27
— числа 33
Квадратное уравнение 37
Квадратный, корень 33
— метр 7
Кельвин 4, 6, 119, 120
Кило 13
Киловатт 105
Киловатт-час 18, 158
Килограмм, ед. массы 5, 102, 103
— ед. силы 18, 102
Килоджоуль 18
Килокалория 18
Кинематика, определение 88
Кинетическая энергия 104
— — при вращении 107
Кипение, зависимость от давления 132
— температура (точка) кипения 131
Клапейрона уравнение 124
Колебание гармоническое 94
Колебания амплитуда 94, 191
— период 94, 191
— частота 94, 191
Колебания поперечные 190
— продольные 191
— электромагнитные 177
Коллектор электромотора 173
— транзистора 156, 157
Кольцо круговое, площадь 71
— — площадь части кольца 71
Комплексные числа 40
Конденсация пара 132
Конус, поверхность и объем 76
— усеченный, поверхность и объем 76
Концентрические окружности 69
Корень 33
— действия с корнями 34
— знак перед корнем 33
Корни квадратного уравнения 37
— свойства 39
Косеканс 78
Косинус 78
Косинусов теорема 85
Косинус фи 176

Котангенс 78
Коэффициент, полезного действия 105, 120
— линейного расширения 121
— мощности 176
— объемного расширения 121
— расширения газа 123
— самоиндукции 171
— теплопроводности 134, 135
— трения скольжения (1-го рода) 108
— — качения (2-го рода) 109
Коэффициенты биномиальные 60
Круг 68
— определение 68
— основные формулы 70
— площадь 70
Куб 73
— поверхность и объем 75
— разности (формула) 27
— суммы (формула) 27
— числа 33
Кубический, корень 33
— метр 7
Кулон 10, 137
Кулона закон 137

Лазер 188
«Левой руки правило» 164
Лекланше элемент 146
Ленца правило 166
Линейная скорость вращения 90
Линейного расширения коэффициент 121
Линейчатый (прерывистый) спектр 186
Линза 184
— главная оптическая ось 184
— двояковогнутая 184
— двояковыпуклая 184
Линия центров кругов 69
Литр 15
Логарифм 51
— десятичный 52
— искусственная форма 56
— мантисса 52
— таблицы 53—55
— характеристика 52
Логарифмирование 51
— правила 51
— приведение тригонометрических выражений к виду, удобному для логарифмирования 84
— пример вычисления 57
Логарифмов таблицы 53—55
Лошадиная сила 19
Лучи невидимые (инфракрасные, ультрафиолетовые, Рентгена) 186
Люкс 12, 180
Люксметр 180
Люмен 12, 180

Магнитная постоянная 161
Магнитное поле 162
Магнитные силовые линии 162
Магнитные силы 159
Магнитный поток 165
— — сцепления 169
Максвелл 16
Мантисса логарифма 52
Масса 5, 111
— протона 21
— электрона 21
Математические обозначения 25
Математический маятник 94
Мега 13

Медиана треугольника 63
Международная система единиц (СИ) 4
Менделеева—Клапейрона уравнение 124
Метр 5
Механика, определение 88
Микро 13
Микрон 19
Микрофарада 143
Милли 13
Миля 19
Минута 14
— дуговая 70
— угловая 15, 70
Мнимые решения квадратного уравнения 38
Многогранники 72
— поверхности и объемы 75
Многоугольник, площадь 66
— правильный 67
Многочленов умножение 27
Момент, инерции 105
— — простейших тел 106
— — силы 9, 98
— — теоремы 99
Мощность 104
— единицы 9, 105
— переменного тока 176
— электрического тока 157

Нано 13
Напряжение электрическое 139
— единицы 10, 139
Напряженность электрического поля 140
— единицы 10, 142
Насыщенные пары 130
Невидимые лучи (инфракрасные, ультрафиолетовые, Рентгена) 186
Нормальное (центростремительное) ускорение 93
Нуль температуры абсолютный 21, 119, 120
Ньютон 8
Ньютона, бином 59
— законы 102

Обозначения математические 25
Оборот в минуту 90
— в секунду 90
Образующая конуса 76
— — усеченного 76
Объем, единицы 7, 15
— килограмм-моля идеального газа 21, 124
— конуса 76
— многогранников 75
— цилиндра 76
— шара и его частей 76, 77
Объемного расширения коэффициент 121
Окружность 68
— диаметр 68
— длина 70
— радиус 68
— секущая 68
— хорда 68
Ом 11, 147
Ома закон 146, 147
Ом-метр 11, 148
Описанный круг, центр 65
— — радиус 86
Оптический квантовый генератор 188
Ортоцентр треугольника 65
Освещенность 180
— единица 12, 180
— законы 180

Основание, логарифма 51
— степени 32
Основные единицы системы СИ 4, 5
Ось вращения 90
Относительные числа сложение и вычитание 26
— — умножение и деление 26
Отражение звука, законы 193
— света, законы 181

Падение тела свободное, законы 93
Пар, давление и плотность 130, 131
— конденсация 132
— насыщенный и ненасыщенный 130
Параллелепипед, прямоугольный 73
— поверхность и объем 75
Параллелограмм, определение и свойства 62
— площадь 66
Параллельное соединение проводников 150
Пара сил 98
Паскаль 8, 114
Паскаля, закон 114
— — для газов 117
— треугольник 60
Передаточное число 91
Переменный ток 174
Перестановки 57
— число (формула) 58
Период вращения 90
— колебания 94, 190
Периметр многоугольника 67
— треугольника 61
Пи 70
Пико 13
Пикофарада 143
Пирамида 74
— правильная 74
— — поверхность и объем 75
— усеченная 74
— — поверхность и объем 75
Пифагора теорема 65
Плавание тел 117
Плавление, температура (точка) плавления 127, 128
Плечо силы 98
Плотность 111
— таблицы 112, 118
— электрического тока 10
Площади многоугольников (формулы) 66
Поверхность конуса 76
— — усеченного 76
— многогранников 75
— цилиндра 76
— шара и его частей 76, 77
Подкоренное число 33
Подстановки способ (система уравнений) 32
Показатель преломления 183
— степени 32
Поле магнитное 162
— электрическое 138
Полупроводники 155
Последовательное соединение проводников 150
Постоянные физические 21
Поток магнитный 165
Потокосцепление магнитное 169
Правильный многоугольник 67
«Правой руки правило» 166
Преломление лучей 182
— отклонение при преломлении 183

— показатель преломления 183
— — различных цветов 185
Призма 72
— правильная 73
— прямая 72
— поверхность и объем 75
Проводимость 150
— удельная 150
Прогрессия арифметическая (разностная) 48
— геометрическая (кратная) 49
— — бесконечно убывающая 50
Произведение суммы на разность (формула) 27
Производные единицы системы СИ 7—12
Пропорция 29
Противодействие, закон равенства действия и противодействия 102
Прямоугольник, определение и свойства 62
— площадь 66

Работа 103
— единицы 103
— электрического тока 157
— — единицы 157
Равенства действия и противодействия закон 102
Равномерное, вращение 90
— движение 89
Равнобедренный треугольник, определение 62
— площадь 66
Равнобочная трапеция 63
Равновесие сил 97
Равнодействующая сила 96
Равносторонний треугольник, определение 62
— площадь 66
Равноускоренное движение 92
Радиан 6
— в секунду 8, 90
Радикал, знак корня 33
Радиоволны 187
Радиус окружности 68
— описанного и вписанного круга (формулы) 67
Разложение на множители (формулы) 27
— трехчлена 2-й степени 40
Размещения, число размещений 57
Разность арифметической (разностной) прогрессии 48
Расширения бином 123
Резонанс акустический 194
Ременная передача 91
Рентгена лучи 186
Реомюра градус 17
Реостат 150
Ромб, определение и свойства 62
— площадь 66

Самоиндукция 171
— коэффициент 172
Санти 13
Сантиметр, единица длины 16, 20
Свет, сила 179
— скорость 179
Свеча 20
Свободное падение тел, ускорение 93
— изменение с высотой 110

Сегмент круга, определение 69
— формулы 71
— шаровой 77
Секанс 78
Сектор круга, определение 69
— площадь 71
— шаровой 77
Секунда 5
— дуговая, угловая 70
Секущая 68
Сила 95
— единицы 102
— звука 194
— линия действия 96
— лошадиная 105
— параллелограмм сил, закон 96
— равнодействующая 96
— света 179
— — единица 6, 179
— сложение 96, 97
— тока 137
— — единицы 5, 137
— электродвижущая 146
Силовые линии магнитные 162
— — электрические 141
Сименс 11, 150
Синус 78
Синусов теорема 85
Система единиц СГС 16
Система СИ 4
Скорость, единицы 7, 89
— звука 192
— линейная при вращении 90
— равномерного движения 89
— света 179, 183
— угловая, единицы 90
Сложение, дробей 28
— относительных чисел 26
— сил 96
Соединения, последовательное, параллельное 150, 151
Сокращенного умножения формулы 27
Сопротивление электрическое, единицы 11, 147
— — определение 146
— — при различных соединениях 151
— удельное 11, 148
Сосуды сообщающиеся 116
Сочетания, число сочетаний 58
Спектр 185
— поглощения 186
— прерывистый (линейчатый) 186
— сплошной 186
Среднее арифметическое 29
— геометрическое 29
Средняя линия трапеции 63
Статика, определение 88
Стен 20
Степень 32
— алгебраические действия 34
Стерадиан 7
Стороны, углы треугольника, зависимость между ними 65
Сумма, арифметической прогрессии 49
— геометрической прогрессии 50
— — бесконечно убывающей 50
— углов треугольника 65
Сферическое зеркало 181

Таблицы тригонометрических функций 79
Тангенс 78
Тангенсов теорема 85
Температура 119
— единицы 6, 119
— плавления, отвердевания 127
Температурная шкала Кельвина 119
— Цельсия 119
Тепловое действие тока 158
Теплоемкость 126
— удельная 126
Теплопроводность 134
— коэффициент 135
— — таблица 135
Теплота 125
— единицы 9, 125
— парообразования удельная 132
— плавления удельная 128
Тера 13
Термический коэффициент сопротивления 148
Термодинамики закон 120
Термодинамическая температурная шкала 120
Тесла 12, 170
Ток индуцированный 168
— мощность 157
— переменный 174
— силз тока, единицы силы тока 5, 137
— тепловое действие 158
— электрический 136
Тон, высота 194
Тонна 20
Траектория 89
Транзистор 156, 157
Трансформатор 177
Трансформирование тока 177
Трапеция 63
— площадь 66
— равнобочная 63
Трение 107
— качения (II рода) 107
— покоя 108
— скольжения (I рода) 107
Треугольник 61
— высота 63
— медиана 63
— основные формулы 65
— Паскаля 60
— косоугольный, формулы 85
— — решение 87
— остроугольный 61
— прямоугольный 61
— — формулы 81
— равнобедренный 62
— — площадь 66
— равносторонний 62
— — площадь 66
— тупоугольный 61
— четыре замечательные точки 64
Трехчлен 2-й степени, разложение 40
Тригонометрические функции 77
— важнейших углов 78, 81, 82
— таблицы 79
Тригонометрия, основные формулы 83

Угловая скорость 90
Угол, измерение 70
— центральный 69
Углы и стороны треугольника, зависимость между ними 65, 81, 87

— дополнительные 83
Удельная теплоемкость 126
— теплота парообразования 132
— — плавления 128
— — сгорания 133
Удельное сопротивление, единицы 11, 148
— — таблица 149
Ультрафиолетовые лучи 186
Умножение дробей 28
— относительных чисел 26
— сокращенное, формулы 27
Универсальная газовая постоянная 124
Уравнение, динамики основное 102
— 1-й степени 29
— — система 30
— квадратное 37
— — неполное 37
— — действительные и мнимые решения 38
— — приведенная форма 37
— — свойства корней (теорема Виета) 39
— — формулы решения 37, 38
— Клапейрона 124
— Менделеева—Клапейрона 124
Уравнивания коэффициентов способ (система уравнений) 31
Усеченная правильная пирамида 74
Ускорение 92
— единица 7, 92
— нормальное (центростремительное) 93
— связь с силой (основное уравнение динамики) 102

Факториал 58
Фарада 11, 143
Фарадея законы 152, 153
— число 21, 153
Фаренгейта градус 17
Физические постоянные 21
Фокус вогнутого зеркала 182
— двояковыпуклой линзы 184
Фокусное расстояние 185
Фотометр 179

Характеристика логарифма 52
— отрицательная 56
Хорда 68

Цветные лучи, зависимость от длины волны 185, 187
Цельсия шкала 119
Центнер 14
Центр вписанного и описанного круга в треугольнике 65
— тяжести тела 99—101
— — треугольника 65
Центральный угол 69
Центростремительная сила 103
Цепь электрическая 145
Цилиндр, поверхность и объем 76

Частота колебаний 94, 191
Числа комплексные 40—48
Число Авогадро 21
— Фарадея 21, 153

Шаг винта 92
Шар, поверхность и объем 76
Шкала Кельвина 119
— Цельсия 119
Щетка электродвигателя 173

Электрическая постоянная 21, 138
Электрический ток 136
— — сопротивление 146
Электричество, количество 136
Электрод 152
Электродвижущая сила 146
— — единица 146
— —индукции 166
— — самоиндукции 171
Электролит 152
Электролитическая ванна 152
Электромагнит 163
Электромагнитная индукция 166
Электромагнитные волны 178
— различной длины 187
Электродвигатель 173
Электрон 137
Электрон-вольт 20
Элемент Даниэля 146
— Лекланше 146
Эмиттер 156, 157
Энергия кинетическая 104
Эрг 16, 20
Эффект бинауральный 195
Эффективное значение напряжения и силы тока 175
Эхо 193

Якорь электромотора 173
Яркость 12

С74 Справочник по элементарной математике, механике и физике. Изд. 12-е. Мн., «Наука и техника», 1973.
216 с. с илл. 200 000 (1—60 000) экз. 41 коп.

В справочнике даются самые разнообразные сведения по алгебре, геометрии, тригонометрии, приводятся основные понятия механики (кинематики, статики, динамики), рассматриваются различные разделы физики (теплота, электричество, свет, звук).

Рассчитан на техников и инженеров, а также может быть использован школьниками старших классов, учащимися техникумов, абитуриентами, студентами вузов и широким кругом лиц, занимающихся самообразованием.— Алф. указатель: с. 196—206.

51(083)+53(083)

СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ, МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ. *Издание двенадцатое.*

Редактор Е. Волкинд. Художественный редактор Н. Евменова. Технический редактор И. Волохановича. Корректор З. Авербах. АТ 04541. Подписано к печати с матриц 4/V-73 г. Бумага тип. № 3. Формат 70×90¹/₃₂. Физ. печ. листов 6,75. Усл. печ. листов 7,89. Уч.-изд. листов 8. Изд. заказ 104. Тип. заказ 421. Тираж 200 000 (1—60 000) экз. Цена 41 коп. Издательство «Наука и техника». Минск, Ленинский проспект, 68. Отпечатано с матриц в типографии имени Франциска Скорины издательства «Наука и техника» АН БССР и Госкомитета СМ БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.